

模型用 DC モータの動作 Coskx Lab

1. はじめに

電池で豆電球を点灯するときは、電池の電圧で豆電球の明るさが決まってしまう。電池で DC ブラシモータ(*1)を動かすときは豆電球とは異なるふるまいをする。

例えば、モータ単体に電池をつないだ時、軸の定常の回転では、1.5V を与えたときより 3V を与えたときの方が軸の回転は速い。しかし一定の電圧を与えたとき、最初、回転軸は止まっているが、徐々に回転は速くなり、1 秒もたたない間に一定の回転となる。また、指で軸をつまむと、回転が遅くなり、強くつまむと回転を止めることもできる。モータの場合、電源の電圧だけで、軸の回転の速さは決まらない。

モータに電池をつないで、モータ軸が自由に回転できる状態で高速回転をしているとき、電流は最も少なくなる。モータに電池をつないだまま、モータ軸を強くつまんで回転を止めると電流は最大になりモータが発熱し、破損することもある。

このようなモータのふるまいについて経験や実験にもとづいて数式化して考えてみよう。

(*1) DC ブラシモータは模型用モータとして市販されている。マブチモータ FA-130RA, RE-260RA などが DC ブラシモータである。以下「モータ」と表現する。

2. 検討のための準備

2.1. トルク (力のモーメント)

電圧が与えられたモータは軸を回そうとする力があり、指でつまむ動作は、軸の回転を止めようとする力を加えたことになる。この「回そうとする力」「回転を止めようとする力」は、「力」ではなく「力のモーメント」あるいはモータなどでは「トルク」と呼ばれる。ここではモータについて考えているので「トルク」の表現を用いる。「トルク」は、例えば図 1 のようにスパナでボルトの頭を回すときに生じている。



図 1 スパナでボルトの頭を回すときに生ずるトルク τ

このとき生じているトルクは力 F と力の作用距離 L の積（正しくは外積）で表される。トルクを τ （タウと読む）で表すと、 $\tau = FL$ で定義される。トルクの単位は Nm（ニュートンメートル）となっている。

モータの軸を指でつまむと、軸の両側から力を加えたことになり、それにより軸の両側に摩擦力が生じ、摩擦力×軸半径×2のトルクを与えていることになる。このトルクはモータの発生トルク

と逆向きなので、回転を止めようとする。

2.2. 角速度

直線上の等速運動のとき、速度は移動した距離を、移動に要した時間で割ることによって得られる。距離 x を単位[m]で表し、時間 t を単位[s (秒)]で表わすと速度 u の単位は[m/s]である。これに対して回転する速さは角速度と呼ばれる。定角速度運動では、角速度 ω は回転した角度をそれに要した時間 t で割ることによって得られる。角度 θ の単位に[rad(ラジアン)]を使うと、角速度 ω の単位は[rad/s]となる。

回転の速さの表現では、角速度 (単位 rad/s) 以外に 1 分当たりの回転数 (単位 rpm, revolutions per minute) あるいは 1 秒当たりの回転数 (単位 rps, revolutions per second) も日常的に使われる。例えば $6000 \text{ rpm} = 100 \text{ rps} = 200\pi \text{ rad/s}$ のように使われる。



図2 直線運動と回転運動

2.3. 変位, 速度, 加速度, 角度, 角速度

直線上の運動であって一定の速度でない場合、時々刻々と変化する速度 $u(t)$ は、非常に短い時間に移動した距離 $x(t+h) - x(t)$ を非常に短い時間 h で割った値と考え、その極限として次のように表される。

$$u(t) = \frac{d}{dt} x(t) \left(= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \right)$$

同様に加速度 $a(t)$ は速度の時間微分と考えられ、次のように表される。

$$a(t) = \frac{d}{dt} u(t) = \frac{d^2}{dt^2} x(t)$$

回転運動であっても、同様に考えられ、角速度 $\omega(t)$ は次のように表現される。

$$\omega(t) = \frac{d}{dt} \theta(t)$$

3. モータ軸の回転

モータ単体に一定の電圧を加えることを考える。例えば 1.5V を与える。しばらくすると軸は一定の角速度 (最高角速度) になる。これは、無負荷回転と呼ばれ、モータ軸が外部にトルクを働かせていない状態である。軸を指でつまんで一定の角速度を保っている状態を考えよう。軸を指でつまむと、止めようとする摩擦トルクが生ずる。一定の角速度で回転しているので、摩擦トルクとモータが外部に作用している軸トルクが釣り合っていると考えられる。つまみ方を強くすると軸の角速度が小さくなる。さらに強くつまむと軸の角速度を 0 (ストール) にすることもできる。摩擦トルクと軸トルクは常に釣り合っているため、軸の角速度が小さいほどモータの軸トルクは大きいことになる。

モータの軸トルク (=与えた摩擦トルクと同じ大きさで向きが反対) が決まれば角速度が決まるという図3に示す状態が経験されていることになる。

図3のトルク-角速度線図はモータの軸トルクと角速度の関係を示している。例えば、図4のようにモータ軸に直結された半径 R のプーリで質量 m を巻き上げを考える。一定角速度で巻き上げているとすれば、質量 m にかかる重力 mg と巻き上げ力は釣り合っているはずなので、軸は mgR の軸トルクを発生していることになる。(mgR の単位はNmであることを確認しておこう。) その時の角速度は図5のトルク-角速度線図から読み取ることができる。(モータの軸トルクが決まると軸の角速度が決まるので、横軸が軸トルクになっている。)

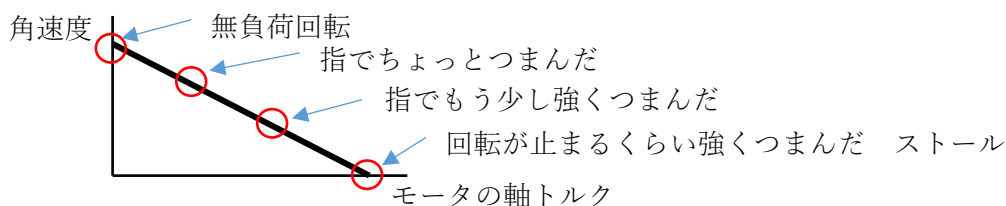


図3 トルク-角速度線図 (一定電圧下でのモータの軸トルクと軸の角速度の関係)

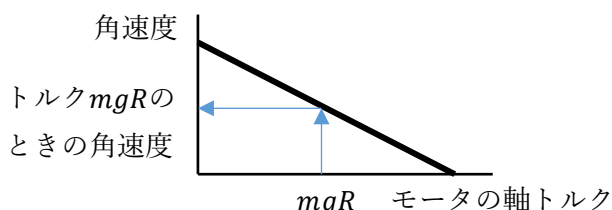
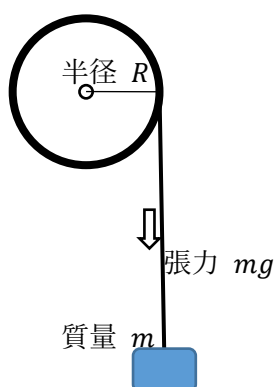


図4 半径 R のプーリで質量 m を巻き上げ

図5 モータの軸トルクから角速度読み取り

4. モータの電流

モータ単体に一定の電圧を加えているとする。図3の各測定点で、モータに流れる電流を測定すると図6のようになっている。

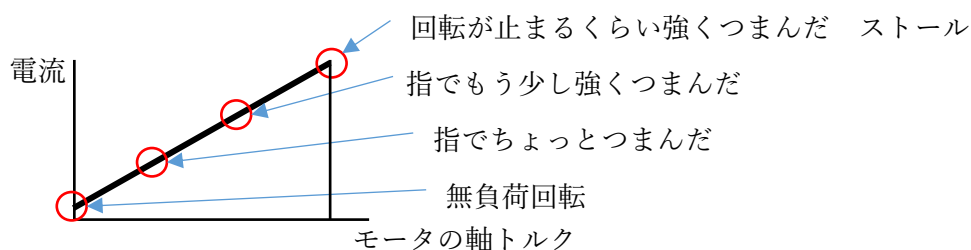


図6 トルク-電流線図 (モータ軸トルクとモータを流れる電流の関係)

無負荷状態で角速度が最大するとき、電流はほとんど流れていない。(この直線は原点を通らない) このとき、モータの軸トルクは0である。また、無理やり軸の回転を止めてしまった (ストール)

とき、電流は最大になっている。このとき、モータの軸トルクは最大になっている。図6に示すトルク-電流線図は、モータの軸トルクが決まれば、その時に流れる電流が決まることを示している。軸を指でつまむ強さを変化させれば摩擦トルク(=モータの発生トルク)を自由に变化させることができ、その時の電流が決まってしまう。

モータ内には導線で電磁石が作られているが、モータ軸をストールさせた状態では、モータは単なる電磁石であり、その抵抗値(モータの内部抵抗)は 1Ω 程度の小さな値となっている。(メーカー資料によれば、マブチモータ FA-130RA, RE-260RA ではそれぞれ 0.68Ω , 0.59Ω) 電圧 $3V$ をモータに加えて、ストールさせると、モータ内部の消費電力 p は、加えた電圧を e_0 、モータ内部抵抗を r としたとき、FA-130RA では $p = e_0^2/r = 3^2/0.68 = 13.2W$ 、RE-260RA では $p = e_0^2/r = 3^2/0.59 = 15.3W$ となり、すべて発熱に使われる。この状態を長時間放置すると、モータが破損する可能性がある。

さて、無負荷回転時に電流がわずかに流れていることを考えよう。無負荷回転とは、モータの外部に取り出せている軸トルクが 0 であるという意味である。モータが純粹に発生しているトルクを τ 、外部に取り出せている軸トルクを τ_s 、内部摩擦トルクを τ_{loss} とすると、 $\tau = \tau_s + \tau_{loss}$ が成り立つ。そのため、無負荷回転時 $\tau_s = 0$ でも内部摩擦トルクに等しいトルク $\tau = \tau_{loss}$ を発生しているため電流が 0 にならないのである。

モータを流れる電流 i とモータの発生トルク τ は比例していると考えられる。これは $\tau = k_\tau i$ と表され、比例定数 k_τ はトルク定数(単位は Nm/A) と呼ばれる。この式は、磁界中の導線を流れる電流に比例した力が発生することと対応している。モータの軸トルク τ_s に関しては $\tau_s = \tau - \tau_{loss} = k_\tau i - \tau_{loss}$ より $i = 1/k_\tau \cdot (\tau_s + \tau_{loss})$ となり、電流 i と軸トルク τ_s の関係を示す図6のグラフ(縦軸 i 、横軸 τ_s) を説明できる。

5. モータは発電機

モータは磁界の中の導線に電流を流してトルクを発生しているが、磁界の中で導線が運動しているので、発電機にもなっている。

手回し発電機では、ハンドルを回転させると、2本の出力端子間に電圧が生ずる。発生する電圧を測定すると図7のようにハンドル軸の角速度に比例している。(よくある手回し発電機の実験では、メトロノームの音に合わせてハンドルを回す。そして、メトロノームの周期を変化させることでハンドルの角速度を変化させ、その時の発生電圧を測定すると角速度と発生電圧の比例関係を観察できる。)

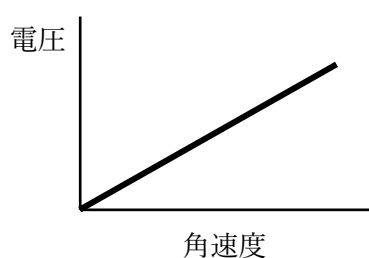


図7 手回し発電機のハンドルの角速度と出力電圧

これと同じことがモータでも起こっており、モータ軸の角速度に比例した電圧が発生する。この時発生する電圧を v_ω 、モータ軸の角速度を ω とすると発生電圧は $v_\omega = k_\omega \omega$ で表される。この発生電圧は逆起電圧と呼ばれている。比例定数 k_ω は電圧定数（単位は Vs/rad）と呼ばれる。（*参考 1）この式は磁界内で移動する導線に生ずる電圧が導線の速度に比例していることと対応している。

手回し発電機で、大容量のコンデンサなどを充電し終わったとき、ハンドルから手を離すと、図8のように発電作業のときと同じ回転方向にハンドルが回り始める。これは手回し発電機が外部（充電し終わったコンデンサ）から電流を得て、モータとして動作し始めたことを意味している。充電時の電流の方向と逆方向の電流を得て、発電中の軸の回転方向と同じ方向に軸が回る。

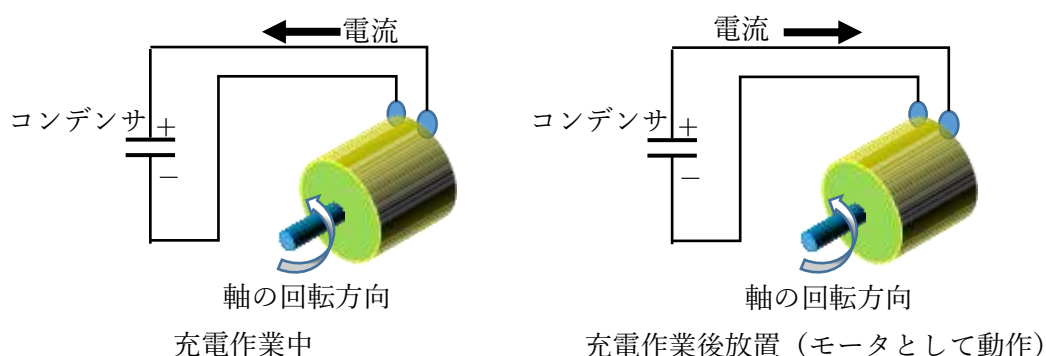


図8 手回し発電機の充放電実験

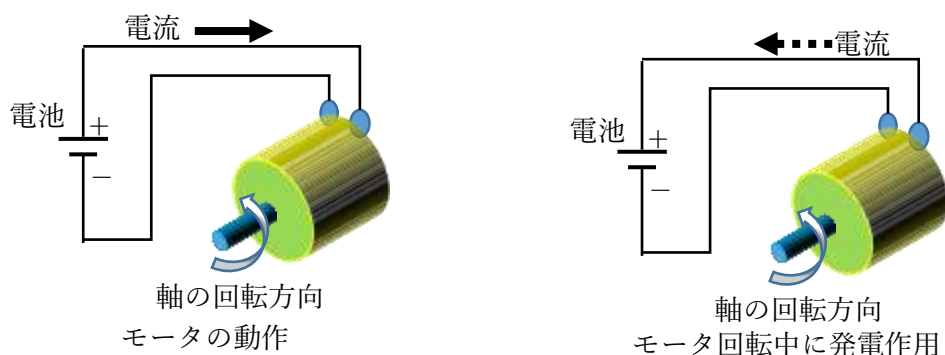


図9 モータの駆動

モータでも全く同じことが起こっている。図8でコンデンサを電池に置き換えると発電機はモータとして動作し、図9となる。図9の左図のように外部から電流を与えられると図8の右図と全く同じで軸が回転する。そして軸が回転すると図8左図と同じことが起こり、図9の右図のように外部からの電流と逆方向に電流を流そうとする電圧が発生する。これが逆起電力となる。手回し発電機では手回し充電と放電駆動を分けて観察したが、モータではこの2つが同時に起こっている。

逆起電力について、フレミングの法則からも考えてみよう。図10の左図は磁界中の導線に上から下に向かって電流が流れているところである。フレミングの左手の法則に従って、導線には手前

向きに力が生ずる。この生じた力によって、導線が手前方向に運動すると、図 10 の右図のようにフレミングの右手の法則により、導線には下から上に向かって電流を流そうとする電圧が生ずる。このことから、外部から与えられた電流の向きと逆向きの起電力=逆起電力の関係がわかる。

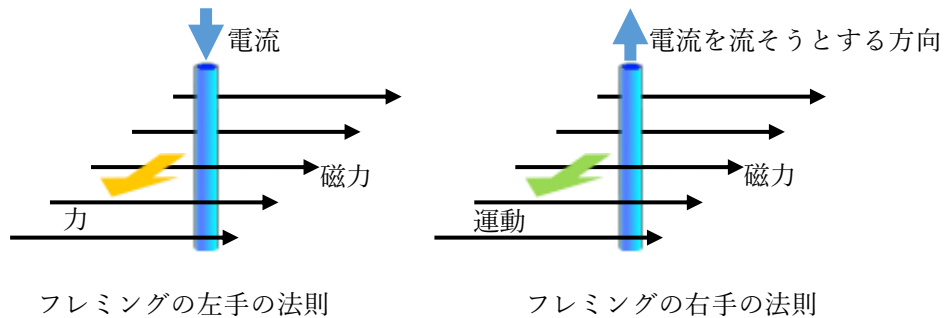


図 10 フレミングの法則

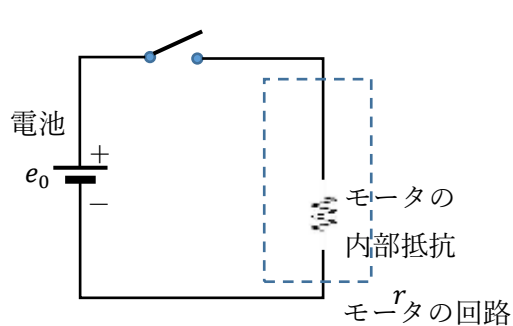


図 11 モータの回路 (電源 OFF)

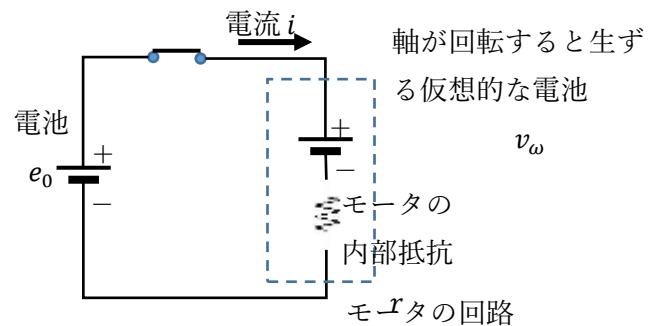


図 12 モータの回路 (動作中)

モータの回路は、図 11 のようにただの小さな抵抗 (1Ω 程度) である。電源 (電圧 e_0) が与えられ、モータ軸が回転している状態では、回転による発電のため、図 12 のように仮想的な電池 (外部の電池の+極に電流を流そうとする電池) が現れ、その電圧 (逆起電圧) は v_ω である。そうすると図 12 では、抵抗に加わる見かけの電圧が $e_0 - v_\omega$ 似る。そしてオームの法則により、 $e_0 - v_\omega = ri$ が成り立っている。(*参考 2)

$v_\omega = k_\omega \omega$ の関係を考慮すれば、 $e_0 = k_\omega \omega + ri$ が成り立つ。

また $\tau = k_\tau i$ の関係から i を消去すれば、 $\omega = \frac{1}{k_\omega k_\tau} (-r\tau + k_\tau e_0) = -\frac{r}{k_\omega k_\tau} \tau + \frac{e_0}{k_\omega}$ となって、負の傾きを持つ図 3 のトルク-角速度線図を表すことになる。(*参考 3)

*参考 1 電圧定数 k_ω とトルク定数 k_τ の関係 ($k_\omega = k_\tau$)

まず初めに電池の消費する電力を考えてみよう。(電池の消費する電力) $= e_0 i = k_\omega \omega i + ri^2$ となるが、 ri^2 は、モータの内部抵抗が発散するジュール熱である。モータがトルクを発生して回転するのにつかわれる電力は $k_\omega \omega i$ である。

次にモータの機械的な仕事率は、発生トルク \times 角速度であるため、(モータの機械的な仕事率) $= \tau \omega = k_\tau i \omega$ となる。

(モータがトルクを発生して回転するのにつかわれる電力)=(モータの機械的な仕事率)なので、 $k_\omega \omega i = k_\tau i \omega$ となり、 $k_\omega = k_\tau$ が成り立つことがわかる。

k_ω の単位は[Vs/rad]であり、 k_τ の単位は[Nm/A]なので一見すると $k_\omega = k_\tau$ は考えにくい。しかし、 $1V=1J/C=1Nm/(As)$ であり、単位 rad は無次元単位であることを考えると、 k_ω の単位は[Vs/rad]は[Nm/A]となり、 k_τ の単位と同じ単位であることがわかる。

*参考2 逆向き電源の直列

逆向きの電池を直列につないだとき、図13のような回路となる。このような回路は通常は使われないが、3つの回路はどれも電池2個で豆電球を点灯させているのと同様である。図12の仮想的な電池は、図13の逆向きにつけた電池と同じ働きをしている。

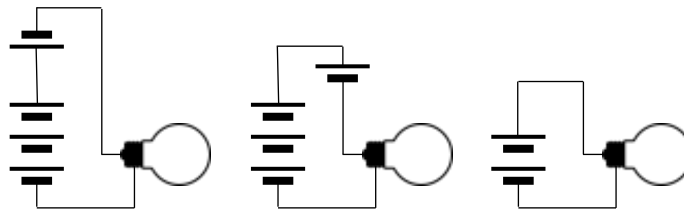


図13 電池で豆電球を点灯する回路（どれも電池2個で豆電球を点灯させているのと同様）

*参考3 最大出力と最大効率

モータが外部にする機械的な仕事率（モータ出力） P_k は、軸トルク $\tau_s \times$ 角速度 ω であるため、

$$P_k = \tau_s \omega = \tau_s \left(-\frac{r}{k_\omega k_\tau} \tau + \frac{e_0}{k_\omega} \right) = -\frac{r}{k_\omega k_\tau} \tau_s \left(\tau - \frac{k_\tau e_0}{r} \right) = -\frac{r}{k_\omega k_\tau} \tau_s \left(\tau_s + \tau_{loss} - \frac{k_\tau e_0}{r} \right)$$

となり、軸トルク τ_s に依存していることがわかる。ただし $\tau = \tau_s + \tau_{loss}$ 、および $\omega = v_\omega / k_\omega = (e_0 - r i) / k_\omega = (e_0 - r \tau / k_\tau) / k_\omega$ の関係を使っている。

また、モータに加えている電力 P_e は電源電圧 $e_0 \times$ 電流 i なので

$$P_e = e_0 i = \frac{e_0}{k_\tau} \tau = \frac{e_0}{k_\tau} (\tau_s + \tau_{loss})$$

であり、モータ効率 η を（モータ出力 P_k ） \div （モータに加えている電力 P_e ）とすれば、

$$\eta = \frac{P_k}{P_e} = -\frac{r}{k_\omega e_0} \frac{\tau_s}{\tau_s + \tau_{loss}} \left(\tau_s + \tau_{loss} - \frac{k_\tau e_0}{r} \right)$$

となり、軸トルク τ_s で表すことができる。軸トルク τ_s によるモータ出力 P_k とモータ効率 η の変化をグラフにすると図14のようになる。

図14のようなグラフは、図3、図6とともに、モータのデータシートに実測値として載っている。データシートの例を図15に示す。

モータの安全運転のためには、最高効率付近で使用するよう推奨されている。またギヤボックスとモータが組み合わさった製品では、最高効率となる軸トルクとその時の角速度がデータとして載っている。

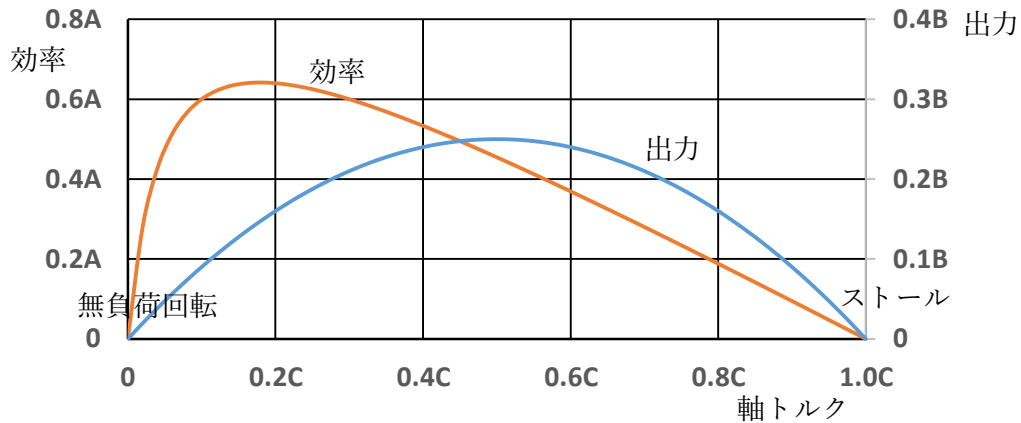


図 14 トルク-出力・効率曲線

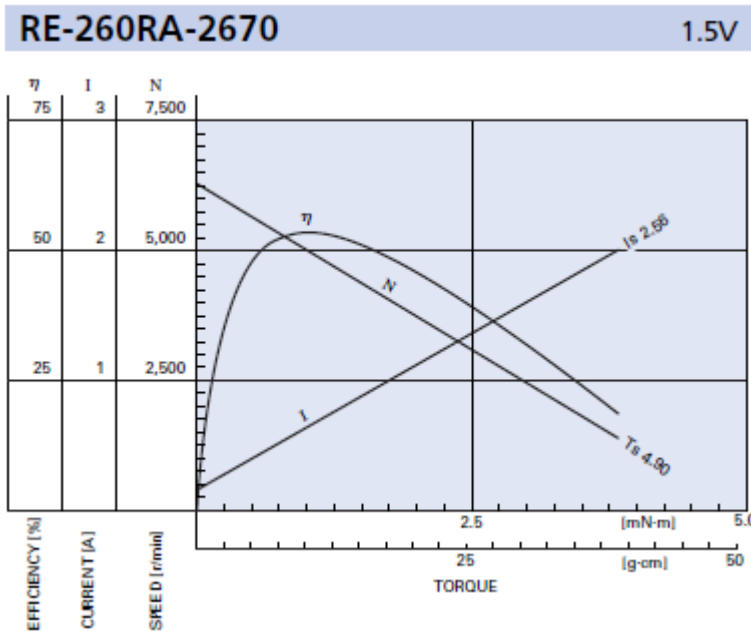


図 15 データシートの例 (RE260RA)

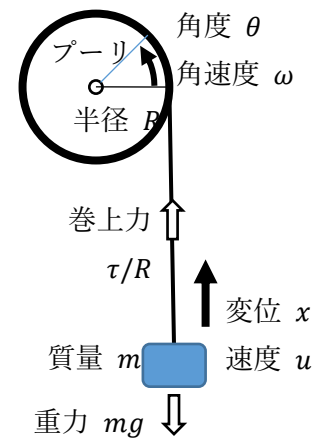


図 16 質量巻き上げ機

6. 質量巻き上げ機構でのモータ起動時のふるまい

図 16 のように、モータ軸直結の半径 R のプーリで質量 m を巻き上げるとき、電源投入直後から定常巻き上げ（一定速度巻き上げ）になるまでのことについて考えよう。単純化のため、プーリを含む回転軸の質量は無視する。

電圧 e_0 の電源投入直後、軸は回転しておらず、角速度 0 であり、逆起電圧 $v_\omega = 0$ であるため、モータは抵抗 r のみの状態となり、最大電流 $i = e_0/r$ となって、最大トルク $\tau = k_t i$ を発生する。すなわち図 5 トルク-角速度線図の右端の状態となる。この発生トルク τ による質量 m への上向きの力 τ/R は重力 mg より大きい。そのため、質量 m の上向きの加速度運動が始まる。巻き上げが始まると軸は角速度 ω を持ち、逆起電圧 $v_\omega = k_\omega \omega$ を発生するため、モータにかかる見かけの電圧が $e_0 - v_\omega$ に変化し、電流が $i = (e_0 - v_\omega)/r$ に減少し、発生トルク $\tau = k_t i$ も減少する。発生トルク τ による質量 m への上向

きの力 τ/R が重力 mg より大きい間は、質量 m の上向きの加速度運動を続ける。さらに軸の角速度が大きくなると、逆起電圧 $v_\omega = k_\omega \omega$ が大きくなり、モータにかかる見かけの電圧 $e_0 - v_\omega$ がさらに小さくなり、電流も弱まる。そしてついには、発生トルク τ による質量 m への上向きの力 τ/R は重力 mg と等しくなってしまう、質量 m は上向き等速度運動になってしまう。

このようなふるまいを動力学モデルで次に検討してみよう。

7. 質量巻き上げ機構の動力学

図 16 の質量巻き上げ機構の動力学モデルを考えてみよう。質量 m に加わるモータ+プーリによる上向きの力は $\tau(t)/R$ 、質量 m に加わる重力は下向きに mg である。質量 m の上向き速度を $u(t)$ とし、質量 m の加速度を、非常に短い時間の速度変化の極限として、 $\frac{d}{dt}u(t)$ と表す。

質量 m の運動方程式は次式(1)のようになる。

$$m \frac{d}{dt} u(t) = \frac{\tau(t)}{R} - mg \quad (1)$$

モータ軸の摩擦を無視することになると、モータの発生トルク $\tau(t)$ はモータの電流 $i(t)$ に比例するので、次式(2)のように表す。 $(k_\tau$ はトルク定数)

$$\tau(t) = k_\tau i(t) \quad (2)$$

モータの逆起電力 v_ω は軸の角速度 ω に比例するので、次式(3)のように表す。 $(k_\omega$ は電圧定数)

$$v_\omega(t) = k_\omega \omega(t) \quad (3)$$

図 12 のように、モータにかかる見かけの電圧が $e_0 - v_\omega$ になるのでモータの内部抵抗に流れる電流は、オームの法則で、次式(4)のようになる。

$$e_0 - v_\omega(t) = ri(t) \quad (4)$$

プーリの回転角 θ と質量の変位 x との間には $x(t) = R\theta(t)$ の関係があるので両辺を時間微分して、次式(5)が成り立つ。

$$u(t) = R\omega(t) \quad (5)$$

ここから式(8)に至るまでの計算は、式(1)から式(5)で $u(t)$ 以外の変化量を消去する過程となる。式(4)に式(3)(5)を代入して、 $v_\omega(t)$ と $\omega(t)$ を消去すると、次式(6)を得る。

$$e_0 - k_\omega \frac{1}{R} u(t) = ri(t) \quad (6)$$

式(2)を式(6)に代入して、 $i(t)$ を消去して、次式(7)を得る。

$$e_0 - k_\omega \frac{1}{R} u(t) = \frac{r}{k_\tau} \tau(t) \quad (7)$$

式(7)を式(1)に代入して、 $\tau(t)$ を消去して、次式(8)を得る。

$$m \frac{d}{dt} u(t) = \frac{k_\tau}{r} \left(e_0 - k_\omega \frac{1}{R} u(t) \right) \frac{1}{R} - mg$$

$$m \frac{d}{dt} u(t) + \frac{k_\tau k_\omega}{r} \frac{1}{R^2} u(t) = \frac{k_\tau e_0}{r} \frac{1}{R} - mg$$

$$mR^2 \frac{r}{k_\tau k_\omega} \frac{d}{dt} u(t) + u(t) = R^2 \frac{r}{k_\tau k_\omega} \left(\frac{k_\tau e_0}{r} \frac{1}{R} - mg \right) \quad (8)$$

ここで、解の見通しをよくするために

$$T = mR^2 \frac{r}{k_\tau k_\omega} \quad (9)$$

$$U = R^2 \frac{r}{k_\tau k_\omega} \left(\frac{k_\tau e_0}{r} \frac{1}{R} - mg \right) \quad (10)$$

とおくと式(8)は次式(11)となる。

$$T \frac{d}{dt} u(t) + u(t) = U \quad (11)$$

T と U は定数であり、それぞれ[s]と[m/s]の単位を持つ。

式(11)のように $u(t)$ およびその微分形を持つ式は、微分方程式と呼ばれる。

この微分方程式は図16の質量巻き上げ機構の質量 m の速度を表す数式表現となっている。巻き上げ機構の起動時を考えているので、 $t=0$ のとき $u(t)=0$ とする。この条件は初期条件と呼ばれる。すなわち、初期条件は次式(12)で与えられる。

$$u(0) = 0 \quad (12)$$

微分方程式(11)を初期条件(12)のもとで解く方法は、数学の教科書(微分方程式)で学ぶことになるが、その解は次式(13)

$$u(t) = U \left(1 - e^{-\frac{1}{T}t} \right) \quad (13)$$

となることが知られている。式(13)を t で微分して、

$$\frac{d}{dt} u(t) = \frac{U}{T} e^{-\frac{1}{T}t} \quad (14)$$

が得られる。式(14)(13)を式(11)の左辺に代入することで、式(11)が成り立つことから、式(13)は式(11)を満たす。また式(13)は初期条件式(12)を満たすことが確かめられる。このことから、式(13)は初期条件(12)の下での微分方程式(11)の解であることが確認できる。

図17に式(13)の $u(t)$ のグラフを示す。起動直後に上向き速度を生ずるが、その速度は徐々に一定値に近づき、十分時間が経過した後は一定速度になる。「7」で示した巻き上げ機構のモータ起動時のふるまいがグラフとして表現されているのがわかる。

式(13)と図17からわかるように、 T は速度が飽和するまでの時間に関連し、 T が大きいほどゆっくりと飽和することを表すため、時定数と呼ばれている。また U は飽和値を示しているためゲインと呼ばれている。

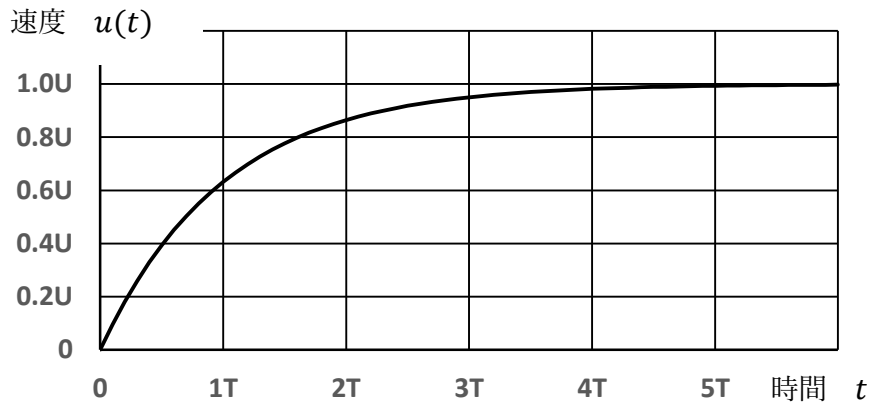


図 17 質量巻き上げ機構の巻き上げ速度

8. まとめ

DC ブラシモータでは、電源電圧と発生トルクが決まれば、軸角速度・電流値が定まる。モータ発生トルクは電流に比例し、モータ逆起電圧は軸角速度に比例する。電流値は（電源電圧－モータ逆起電圧）／モータの内部抵抗で求められる。

モータ＋プーリの質量巻き上げ機構の電源投入直後のふるまいは、運動方程式が表現される微分方程式で表され、これを解くことで電源投入直後のふるまいを得ることができる。

モータ＋プーリの質量巻き上げ機構では、電源投入と同時に最大電流最大トルクとなり質量は上向きの運動を開始するが、その速度は徐々に一定値に向かい、十分時間が経過するとモータの軸トルクが発生する上向きの力と重力が釣り合って一定値になる。

ここでの計算に限らず、科学技術上の課題は、現実を単純化して計算されている。ここでは摩擦をすべて無視し、モータ軸・プーリの質量を 0 にするなどの単純化を行っている。また比例しているとみなした関係も現実には比例するのはある範囲を限った場合であることも多い。現実と理論計算の乖離が大きくなった場合には単純化を見直して計算しなおす必要がある。