

模型用 DC モータを使った単純台車の動作 Coskx Lab

1. はじめに

電源スイッチを操作して、電池使用の DC ブラシモータ+ギヤボックス+車輪で台車を駆動し、搭載物を運搬するときの特性について考えてみよう。特に、発進時の最大加速度と停止動作での最大加速度、定常速度に注目する。最大加速度は、積載物に慣性力を与えるため、積載物の安定にとって影響が大きい。定常速度は積載物運搬能力に対応する。様々な組み合わせで実験を重ねると法則らしきものが見えてくると思うが、モータの特性や力学法則から動力学モデルを作成し、検討すると、実験の結果を解釈することができて、実験で得られた法則についてより確信を持つことができる。

ここでは台車の動力学モデルを構築し、次の点に着目して検討を行う。

- (1)ギヤ比の大小による影響
- (2)モータと直列に小さな抵抗を挿入したときの発進時最大加速度と定常速度
- (3)停止動作時のショートブレーキ効果
- (4)モータと直列に小さな抵抗を挿入したときの制動時最大加速度

検討にあたって、次の仮定を行う。

- (1)モータは指定のものを使用するため、その特性を変更することはできない。
- (2)電源電圧は指定されているため、変更することはできない。

2. 発進時の台車モデル (DC ブラシモータ+ギヤボックス+車輪)

台車の駆動部分のモデルを図1に示す。DC ブラシモータ、ギヤボックス、車輪で構成されている。

ギヤボックスモデルを図2に示す。単純化のため、モータ軸、及び全回転部分の質量を0として解析を進める。このモデルではギヤボックスは1段構成である。回転部分の質量を0と仮定したため、2段以上の構成でもギヤ比が異なるだけで、同等に扱うことにする。ギヤ比 n は被駆動側歯数÷駆動側歯数で定義され、 $1 < n$ の場合は減速することになる。そして次の関係が成り立つ。

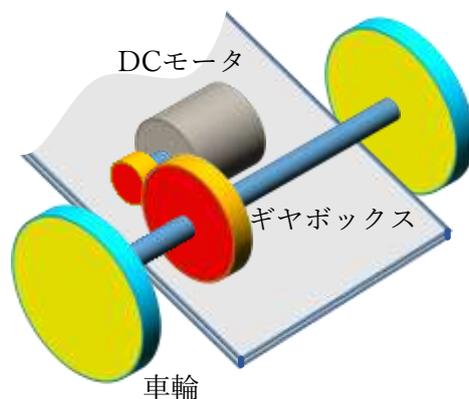


図1 台車の駆動部分モデル

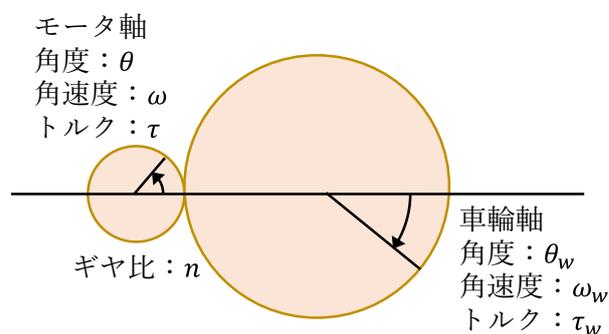


図2 ギヤボックスモデル

$$\theta_w(t) = \frac{1}{n}\theta(t), \quad \omega_w(t) = \frac{1}{n}\omega(t), \quad \tau_w(t) = n\tau(t) \quad (1)$$

台車運動モデルを図3に示す。車輪は車輪軸トルク τ_w を受け、床面を τ_w/R の力で後ろ向きに押すが、その反作用が台車を前に進める駆動力 F_M となる。そして次の関係が成り立つ。

$$x(t) = R\theta_w(t), \quad u(t) = R\omega_w(t), \quad F_M(t) = \tau_w(t)/R \quad (2)$$

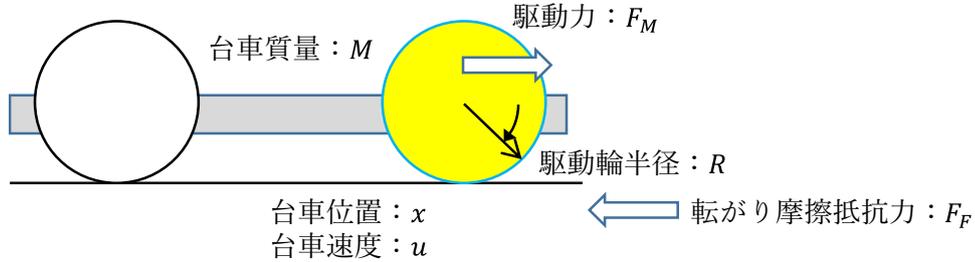


図3 台車運動モデル

台車が前進している間は常に一定の転がり摩擦抵抗力 F_F を受けるものと仮定する。この転がり摩擦抵抗力 F_F には、車輪に加え、モータやギヤボックスの転がり抵抗が含まれている。台車に関する運動方程式は次式(3)のように表される。ただし台車の加速度は速度の時間微分で表している。

$$M \frac{d}{dt} u(t) = F_M(t) - F_F \quad (3)$$

DC ブラシモータの電気回路モデルを図4に示す。スイッチがONになった直後を考える。

モータの発生するトルク $\tau(t)$ はモータ中の電流 $i(t)$ に比例し、モータの逆起電圧 $v_\omega(t)$ はモータ軸の角速度 $\omega(t)$ に比例する。それぞれの比例定数を k_τ (トルク定数, 単位は Nm/A) と k_ω (電圧定数, 単位は Vs/rad) とすると、これらの関係は次式(4)(5)のよう表される。

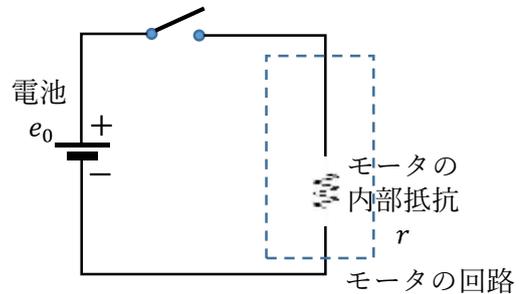


図4 DC ブラシモータモデル

$$\tau(t) = k_\tau i(t) \quad (4)$$

$$v_\omega(t) = k_\omega \omega(t) \quad (5)$$

また、モータが回転しているときはモータに加わる見かけの電圧が $e_0 - v_\omega(t)$ になるためモータ内の電流 $i(t)$ は、モータの内部抵抗によって、オームの法則に従って次式(6)となる。

$$e_0 - v_\omega(t) = ri(t) \quad (6)$$

ここから式(11)に至るまでの計算は、 $u(t)$ 以外の変化量を消去する過程となる。

(1)の関係から式(4)は次式(7)となる。

$$\tau_w(t) = nk_\tau i(t) \quad (7)$$

(1)(2)の関係から式(5)は次式(8)となる。

$$Rv_\omega(t) = k_\omega nu(t) \quad (8)$$

式(7)(8)により式(6)は次式(9)となる。

$$nRk_{\tau}e_0 - n^2k_{\tau}k_{\omega}u(t) = Rr\tau_w(t) \quad (9)$$

(2)の関係から式(3)は次式(10)となる。

$$M \frac{d}{dt} u(t) = \tau_w(t)/R - F_F \quad (10)$$

式(9)を式(10)に適用して、次式(11)を得る。

$$\begin{aligned} RM \frac{d}{dt} u(t) &= \tau_w(t) - RF_F \\ R^2rM \frac{d}{dt} u(t) &= nRk_{\tau}e_0 - n^2k_{\tau}k_{\omega}u(t) - R^2rF_F \\ R^2rM \frac{d}{dt} u(t) + n^2k_{\tau}k_{\omega}u(t) &= nRk_{\tau}e_0 - R^2rF_F \\ \frac{R^2rM}{n^2k_{\tau}k_{\omega}} \frac{d}{dt} u(t) + u(t) &= \frac{1}{n^2k_{\tau}k_{\omega}} (nRk_{\tau}e_0 - R^2rF_F) \\ \frac{R^2rM}{n^2k_{\tau}k_{\omega}} \frac{d}{dt} u(t) + u(t) &= \frac{R^2r}{n^2k_{\tau}k_{\omega}} \left(n \frac{k_{\tau}e_0}{r} \frac{1}{R} - F_F \right) \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、解の見通しをよくするために

$$T = \frac{1}{n^2} MR^2 \frac{r}{k_{\tau}k_{\omega}} \quad (12)$$

$$U = \frac{1}{n^2} R^2 \frac{r}{k_{\tau}k_{\omega}} \left(n \frac{k_{\tau}e_0}{r} \frac{1}{R} - F_F \right) \quad (13)$$

$$U = \frac{1}{n^2} R^2 \frac{1}{k_{\tau}k_{\omega}} \left(nk_{\tau}e_0 \frac{1}{R} - rF_F \right) \quad (13')$$

とおくと、式(8)は次式(14)となる。

$$T \frac{d}{dt} u(t) + u(t) = U \quad (14)$$

T と U は定数であり、それぞれ[s]と[m/s]の単位を持つ。

後の考察のため、式(12)(13)より U/T の値も求めておこう。

$$\frac{U}{T} = \frac{1}{M} \left(n \frac{k_{\tau}e_0}{r} \frac{1}{R} - F_F \right) \quad (15)$$

式(14)のように $u(t)$ およびその微分形を持つ式は、微分方程式と呼ばれる。

3. 発進時の加速度と最大速度

台車の発進時を考えよう。 $t = 0$ のとき $u(t) = 0$ である。この条件は初期条件と呼ばれる。すなわち、初期条件は次式(16)で与えられる。

$$u(0) = 0 \quad (16)$$

微分方程式(14)を初期条件(16)のもとで解く方法は、数学の教科書(微分方程式)で学ぶことになるが、その解は次式(17)となることが知られている。

$$u(t) = U \left(1 - e^{-\frac{1}{T}t} \right) \quad (17)$$

式(17)を t で微分すると、次式(18) が得られる。これは台車の加速度を表している。

$$\frac{d}{dt}u(t) = \frac{U}{T}e^{-\frac{1}{T}t} \quad (18)$$

式(17)(18)は微分方程式(14)を満たし、式(17)は式(16)を満たすので、式(17)は初期条件(16)の下での微分方程式(14)の解であることが確かめられる。

解(17)(18)をグラフに表すと、図5、図6のようになる。起動直後に最大加速度を生じ、加速度は徐々に小さくなり、時間の経過とともに、速度は一定値となる。

グラフから次のことがわかり、この後の考察の指針となる。

- (1) T が大きくなると、一定速度になるのが遅くなる。
- (2) U が大きくなると、最大速度が大きくなる。
- (3) U/T が大きくなると最大加速度が大きくなる。

式(17)と図5 からわかるように、 T は速度が飽和するまでの時間に関連し、 T が大きいほどゆっくりと飽和することを表しているため、時定数と呼ばれている。また U は飽和値（最大速度）を示しておおり、ゲインと呼ばれている。さらに U/T は最大加速度を表している。

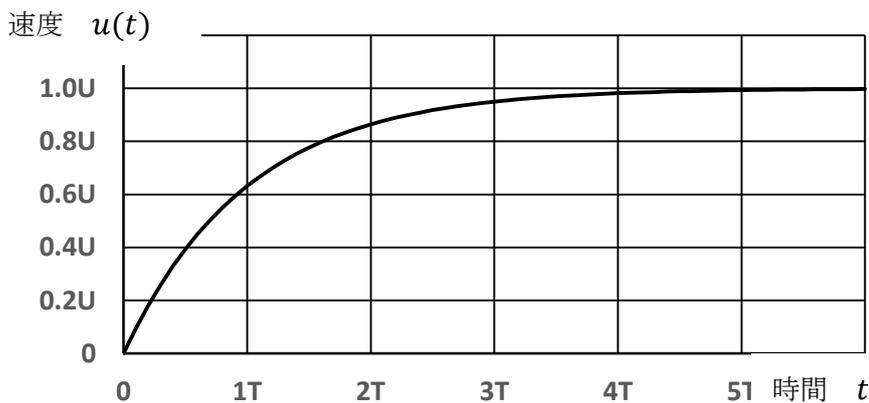


図5 発進時の台車の速度曲線

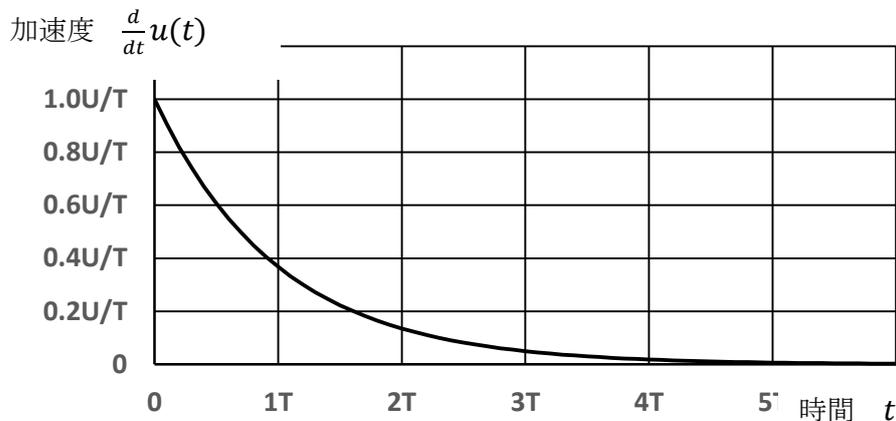


図6 発進時の台車の加速度曲線

4. 発進時および定常走行におけるギヤ比の影響

ギヤ比 n が時定数 T ，ゲイン U ，最大加速度 U/T に及ぼす影響を考えるためには，「3」で考察した結果が使える。

時定数 T は，式(12)より，ギヤ比 n が大きくなれば小さくなり，短い時間で定常速度に到達できることがわかる。

ギヤ比 n のゲイン U への影響を考える。式(13)を変形して次式(19)を得る。

$$U = \frac{Re_0}{k_\omega} \frac{1}{n^2} \left(n - \frac{Rr}{k_t e_0} F_F \right) \quad (19)$$

さらに

$$A = \frac{Re_0}{k_\omega}, \quad B = \frac{Rr}{k_t e_0} F_F \quad (20)$$

とおく。 A は[m/s]の単位を持ち，台車速度に関連する値である。 B は単位を持たず，転がり摩擦抵抗 F_F ÷モータ駆動力 F_M の値である。そして次式(21)を得る。

$$U = A \frac{1}{n^2} (n - B) \quad (21)$$

ゲイン U を n で微分して U の増減を調べてグラフ化すると図7のようになる。

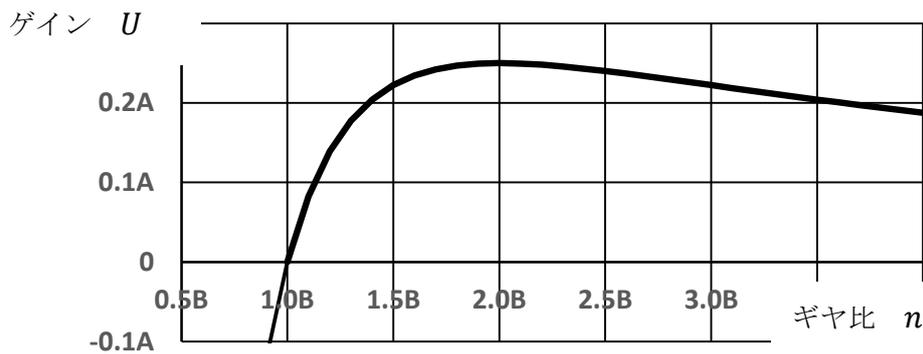


図7 ギヤ比 n のゲイン U に与える影響

ゲイン U は負にはならないため， $B < n$ でなければならない。ゲイン U は $n = 2B$ で最大になることがわかる。ゲイン U は最大速度に対応するので，最大速度は $n = 2B$ で最大になる。

最大加速度 U/T は，式(15)より，ギヤ比 n が大きくなれば大きくなり，発進時最大加速度が大きくなることがわかる。ただし，発進時最大加速度は瞬時の値なので，ギヤボックスでの摩擦抵抗の影響を受けやすく，ギヤ比 n を大きくするときはギヤの段数も増え摩擦抵抗も増えるので，逆に最大加速度 U/T を押し下げる要因となり，この検討通りにならない場合が多いと考えられる。

5. 発進時および定常走行におけるモータ出力緩和抵抗の影響

抵抗値がモータの内部抵抗に近い値の抵抗を，モータと直列に挿入すると，電流値が制限され，最大加速度を小さくすることができそうである。図8のようにモータ外部に抵抗（モータ出力緩和抵抗）を挿入した場合について考察する。この場合電流路内の抵抗値が r から $r + r_A$ に変化させたことになる。見方を変えると図4において内部抵抗値 r を大きくしたことになる。

時定数 T は、式(12)より、抵抗値 r が大きくなれば大きくなり、定常速度にゆっくりと到達することがわかる。

ゲイン U は、式(13')より、抵抗値 r が大きくなれば小さくなり、最大速度（定常速度）が小さくなることをわかる。ただし $0 < U$ なので、式(13')のこの中が負になるほど抵抗値 r を大きくすることはできない。

最大加速度 U/T は式(15)より、抵抗値 r が大きくなれば小さくなり、発進時最大加速度が小さくなる。

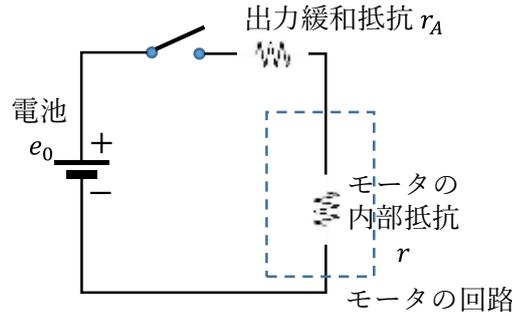


図8 モータ外部のモータ出力緩和抵抗

6. 停止動作時の台車モデル（自然停止）

図4あるいは図8のモータ駆動回路で駆動され、速度 U_0 で進行中の台車を考える。スイッチがOFFになると、電流路は完全に断たれるため、台車は惰性で進むが、モータはトルクを発生しないので、ただのおもりにしかならない。（モータやギヤボックス内の摩擦抵抗は、台車の転がり摩擦抵抗に含まれている。）この運動は、図3の台車運動モデルでモータの駆動力 F_M を0にしたものになる。すなわち、式(3)で $F_M(t) = 0$ とした関係が成り立ち、次式(22)となる。

$$M \frac{d}{dt} u(t) = -F_F \tag{22}$$

スイッチをOFFにした瞬間を $t = 0$ と考え、それ以降 $0 \leq u(t)$ の範囲で、この微分方程式は有効である。また、初期条件は次式(23)となる。

$$u(0) = U_0 \tag{23}$$

この解は、定加速度運動なので次式(24)となる。

$$u(t) = -\frac{F_F}{M} t + U_0 \tag{24}$$

$$\frac{d}{dt} u(t) = -\frac{F_F}{M} \tag{25}$$

式(24)(25)は微分方程式(22)を満たし、式(24)は式(23)を満たすので、式(24)は初期条件(23)の下での微分方程式(22)の解であることが確かめられる。

7. 停止動作時の台車モデル（DC ブラシモータ+ギヤボックス+車輪+ショートブレーキ）

図9のモータ駆動回路で駆動され、速度 U_0 で進行中の台車を考える。スイッチが切り替わると、

モータの両端がショート状態になる。この場合、抵抗値 r の電流路が作られるため、モータが回転している間は逆起電圧による電流が流れるため、モータはこの電流でトルクを生じ、車輪に駆動力を与えることになる。

図9において、駆動時と停止動作時で比べると回路は、電源電圧が e_0 から0になったことになる。発進時を想定して作成した微分方程式(11)でも $e_0 = 0$ とにおいて次の式(26)が停止動作を表す。

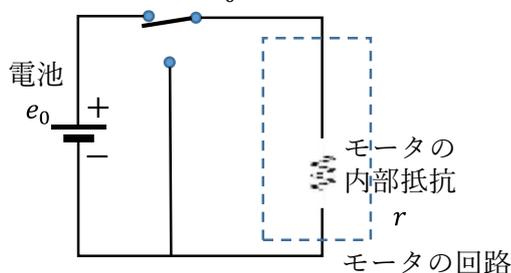


図9 ショートブレーキ切替回路

$$\frac{R^2 r M}{n^2 k_\tau k_\omega} \frac{d}{dt} u(t) + u(t) = -\frac{R^2 r}{n^2 k_\tau k_\omega} F_F \quad (26)$$

ここで、解の見通しをよくするために

$$T = \frac{1}{n^2} M R^2 \frac{r}{k_\tau k_\omega} \quad (27)$$

$$U_1 = -\frac{R^2 r}{n^2 k_\tau k_\omega} F_F \quad (28)$$

とおくと、式(26)は次式(29)となる。

$$T \frac{d}{dt} u(t) + u(t) = U_1 \quad (29)$$

T と U_1 は定数であり、それぞれ[s]と[m/s]の単位を持つ。

微分方程式(29)を解く際の初期条件は、次式(30)である。

$$u(0) = U_0 \quad (30)$$

初期条件(30)のもとで微分方程式(29)を解くと次のようになることが知られている。

$$u(t) = U_1 + (U_0 - U_1) e^{-\frac{1}{T}t} \quad (31)$$

$$\frac{d}{dt} u(t) = -\frac{U_0 - U_1}{T} e^{-\frac{1}{T}t} \quad (32)$$

式(31)(32)は微分方程式(29)を満たし、式(31)は式(30)を満たすので、式(31)は初期条件(30)の下での微分方程式(29)の解であることが確かめられる。

式(31)においては、十分時間が経過した後では $u(t) = U_1 < 0$ になる。しかし、 $0 \leq u(t)$ の範囲で停止動作は終了してしまうので、 $u(t) = U_1$ にはならない。

図10に U_1 と U_0 の比を適当に定めたときの速度曲線を示す。有効なのは $0 \leq u(t)$ の範囲である。

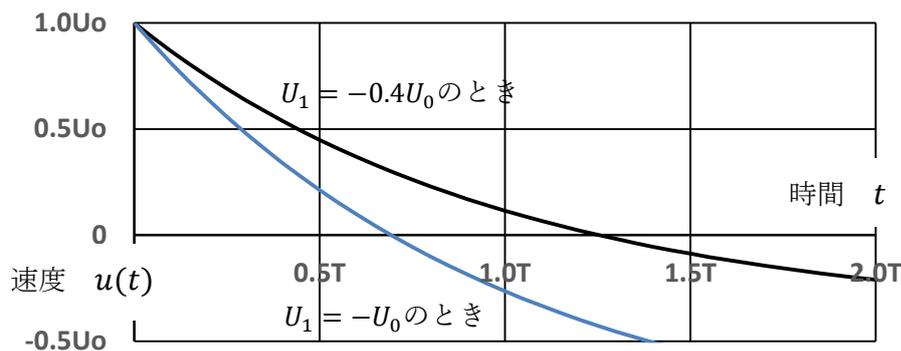


図 10 停止動作時の台車の速度曲線

さて、微分方程式(26)を式(33)のように変形してみよう。

$$M \frac{d}{dt} u(t) = -\frac{n^2 k_r k_\omega}{R^2 r} u(t) - F_F \quad (33)$$

式(22)と式(33)を比較すると $0 \leq u(t)$ の範囲で右辺の止めようとする力は式(33)の方が大きい。すなわち、惰性走行による自然停止より、モータ端子間をショートさせたときの方が強い制動がかかることがわかる。この効果はショートブレーキと呼ばれる。

また式(33)はギヤ比を大きくすると、右辺の絶対値を大きくし、より大きな制動力が生ずることを示している。

8. ショートブレーキの緩和抵抗

図 9 のショートブレーキ回路に外部抵抗を加え、図 11 のようにした場合の効果について考えよう。この場合電流路内の抵抗値が r から $r + r_A$ に変化させたことになる。見方を変えると図 9 の内部抵抗値 r を大きくしたことになる。そこで式(33)の右辺第 1 項で r を大きくすると、その項の絶対値が小さくなり、式(33)の右辺の止めようとする力が弱くなるということになる。そうするとショートブレーキの効果が緩和されることになる。

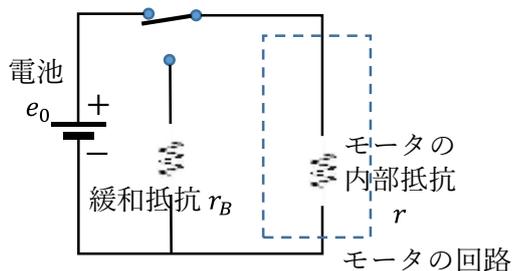


図 11 緩和抵抗付きショートブレーキ切り替え回路

ショートブレーキの消費電力に関して考えてみよう。モータが車輪によって回転させられている状況ではモータは発電機として動作し、角速度に対応した逆起電力 $v_\omega(t) = k_\omega \omega(t)$ を発生している。モータの電気回路は電流路として閉じており、モータの内部抵抗 r のみの場合には、この抵抗で電力 $v_\omega^2(t)/r$ を発熱として消費している。電流路の抵抗が $r + r_B$ になると、電力 $v_\omega^2(t)/(r + r_B)$ を発熱とし

て消費することになり、 r_B を大きくすれば、消費電力が小さくなる。台車が走行中に持っている運動エネルギーは、ショートブレーキを用いなければ、回転摩擦のみで熱散逸することになるが、ショートブレーキを用いる場合は回転摩擦と電気抵抗の両方で熱散逸させることができる。抵抗値 r_B を大きくすると抵抗での熱散逸が小さくなるため、制動距離が長くなると説明できる。

9. まとめ

ブラシ DC モータで駆動する台車のふるまいを、ギヤ比と出力緩和抵抗、ショートブレーキ、ショートブレーキ緩和抵抗との関連で解析した。

ギヤ比を小さくすると、大きな最高速を得られるが、最高速に達するまでの時間が長くなり、またショートブレーキの効果は小さくなる。

ギヤ比を大きくすると、最高速が小さくなるが、短時間で最高速に達することができる。

出力緩和抵抗を用いると、最高速・最大加速度を小さくできる。

ショートブレーキを用いると、制動距離を短くすることができる。

ショートブレーキの効果が大きすぎると制動時の加速度が大きくなるが、ショートブレーキ緩和抵抗を用いると、ショートブレーキの効果を緩和し制動時の加速度を低減することができる。

ここでの計算に限らず、科学技術上の課題は、現実を単純化して計算されている。ここでは摩擦をすべて無視し、モータ軸・プーリの質量を 0 にするなどの単純化を行っている。現実と理論計算の乖離が大きくなった場合には単純化を見直して計算しなおす必要がある。