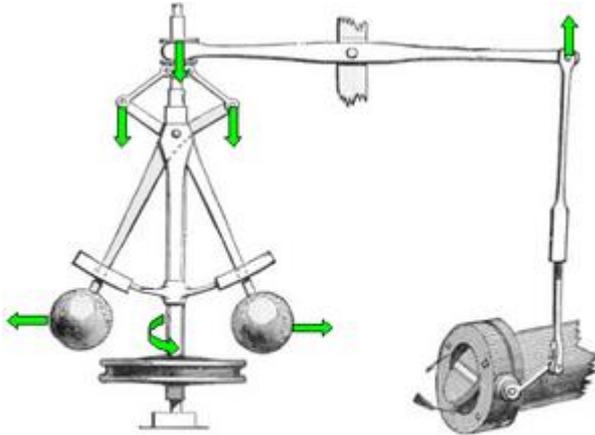


システム制御資料 2015 担当小坂

1. 自動制御とは

1. 1 自動制御の種類と発展過程

自動制御の始まり ワットの調速機



画像:325px-Fliehkraftregler.PNG

出典: フリー百科事典

『ウィキペディア (Wikipedia)』

図1. 1 ワットの調速機

1. 2 シーケンス制御とフィードバック制御
1. 3 オープンループ制御とフィードバック制御
1. 4 自動調整・サーボ機構・プロセス制御

2. 数学的準備

2. 1 定係数線形微分方程式

- (1) 直進運動において、運動方程式は「ある物体の質量」×「その物体に生ずる加速度」＝「その物体に加わる力の合計」で表される。地球上で空気の抵抗が無視できれば、質量 m [kg]の物体に加わる力（重力＝地球が引っ張る下向きの力）は $m g$ [N(ニュートン)]である。（ g は重力加速度[m/s²]である）この物体の変位（垂直方向の位置）を x [m]で表した関係式（運動方程式）を求めよう。
- (2) 直進運動において、運動方程式は「ある物体の質量」×「その物体に生ずる加速度」＝「その物体に加わる力の合計」で表される。地球上で空気の抵抗が無視できなければ、質量 m [kg]の物体に加わる力（重力＝地球が引っ張る下向きの力）は $m g$ [N(ニュートン)]と空気抵抗による止めようとする力との合計である。（ g は重力加速度[m/s²]である）その物体の変位（垂直方向の位置）を x [m]で表した、関係式（運動方程式）を求めよう。なお空気抵抗による止めようとする力は物体の速度に比例する量で、比例定数を D として表そう。

2. 2 ラプラス変換 ラプラス変換表を用いる

2. 3 ラプラス変換による定係数線形微分方程式の解

- (1) 自由落下 $m\ddot{x}(t) = -mg \rightarrow \ddot{x}(t) = -g$

a) $x(0) = h, \dot{x}(0) = w$ の時

手順1) 変換表を用いてラプラス変換を行う

$$s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) = -g \frac{1}{s} \quad s^2 X(s) - sh - w = -g \frac{1}{s}$$

手順2) X について解く

$$X(s) = -g \frac{1}{s^3} + w \frac{1}{s^2} + h \frac{1}{s}$$

手順3) 変換表を用いて逆ラプラス変換を行う

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + wt + h$$

ちなみに速度は $v(t) = \dot{x}(t) = -gt + w$

b) $x(0) = h, \dot{x}(0) = 0$ の時

手順 1) ラプラス変換を行う

$$s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) = -g \frac{1}{s} \quad s^2 X(s) - sh = -g \frac{1}{s}$$

手順 2) X について解く

$$X(s) = -g \frac{1}{s^3} + h \frac{1}{s}$$

手順 3) 逆ラプラス変換を行う

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h$$

ちなみに速度は $v(t) = \dot{x}(t) = -gt$

c) $x(0) = 0, \dot{x}(0) = w$ の時

手順 1) ラプラス変換を行う

$$s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) = -g \frac{1}{s} \quad s^2 X(s) - w = -g \frac{1}{s}$$

手順 2) X について解く

$$X(s) = -g \frac{1}{s^3} + w \frac{1}{s^2}$$

手順 3) 逆ラプラス変換を行う

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + wt$$

ちなみに速度は $v(t) = \dot{x}(t) = -gt + w$

d) $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$ の時

手順 1) ラプラス変換を行う

$$s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) = -g \frac{1}{s} \quad s^2 X(s) = -g \frac{1}{s}$$

手順 2) X について解く

$$X(s) = -g \frac{1}{s^3}$$

手順 3) 逆ラプラス変換を行う

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2$$

ちなみに速度は $v(t) = \dot{x}(t) = -gt$

課題 2. 3. 1 a)b)c)d)について $x(t), v(t)$ のグラフを描きなさい。ただし $0 < h, w$

(2) 粘性抵抗があるもとでの自由落下 $m\ddot{x}(t) = -mg - D\dot{x}(t)$

$x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$ の時のみを考える

手順 1) ラプラス変換を行う

$$m(s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)) = -mg \frac{1}{s} - D(sX(s) - x(0)) \quad ms^2 X(s) = -mg \frac{1}{s} - D s X(s) \quad (\times)$$

手順 2) X について解く

$$(ms^2 + Ds)X(s) = -mg \frac{1}{s} \quad X(s) = -mg \frac{1}{s^2(ms + D)} \quad X(s) = -g \frac{1}{s^2 \left(s + \frac{D}{m} \right)}$$

手順 3) 逆ラプラス変換を行う

ここで部分分数分解を行う

$$\frac{1}{s^2 \left(s + \frac{D}{m} \right)} = \frac{a}{s^2} + \frac{b}{s} + \frac{c}{s + \frac{D}{m}} \quad \text{とおいて, } a, b, c \text{ を定める.}$$

右辺を通分して両辺の分子を比べると

$$1 = as + a \frac{D}{m} + bs^2 + bs \frac{D}{m} + cs^2 \quad 1 = (b+c)s^2 + \left(a + \frac{D}{m}b \right)s + a \frac{D}{m} = 1$$

$$\begin{cases} b+c=0 \\ a + \frac{D}{m}b=0 \\ a \frac{D}{m}=1 \end{cases} \quad \text{より,} \quad \begin{cases} a = \frac{m}{D} \\ b = -\frac{m^2}{D^2} \\ c = \frac{m^2}{D^2} \end{cases}$$

$$\therefore \frac{1}{s^2 \left(s + \frac{D}{m} \right)} = \frac{m}{D} \frac{1}{s^2} - \frac{m^2}{D^2} \frac{1}{s} + \frac{m^2}{D^2} \frac{1}{s + \frac{D}{m}}$$

$$X(s) = -g \left(\frac{m}{D} \frac{1}{s^2} - \frac{m^2}{D^2} \frac{1}{s} + \frac{m^2}{D^2} \frac{1}{s + \frac{D}{m}} \right) \quad X(s) = \frac{mg}{D} \left(-\frac{1}{s^2} + \frac{m}{D} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{D}{m}} \right) \right)$$

$$x(t) = \frac{mg}{D} \left(-t + \frac{m}{D} \left(1 - \exp \left(-\frac{D}{m} t \right) \right) \right)$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = -\frac{mg}{D} \left(1 - \exp \left(-\frac{D}{m} t \right) \right)$$

課題 2. 3. 2 (1) と同様に 4 つの場合について計算し, それぞれグラフを描きなさい。

解答 (答え合わせ用) $x(0) = h, \dot{x}(0) = 0$ の時

$$x(t) = \frac{mg}{D} \left(-t + \frac{m}{D} \left(1 - \exp \left(-\frac{D}{m} t \right) \right) \right) + h$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = -\frac{mg}{D} \left(1 - \exp \left(-\frac{D}{m} t \right) \right)$$

解答 (答え合わせ用) $x(0) = 0, \dot{x}(0) = w$ の時

$$x(t) = \frac{mg}{D} \left(-t + \frac{m}{D} \left(1 - \exp \left(-\frac{D}{m} t \right) \right) \right) + \frac{mw}{D} \left(1 - \exp \left(-\frac{D}{m} t \right) \right)$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = -\frac{mg}{D} \left(1 - \exp \left(-\frac{D}{m} t \right) \right) + w \exp \left(-\frac{D}{m} t \right)$$

解答 (答え合わせ用) $x(0) = h, \dot{x}(0) = w$ の時

$$x(t) = \frac{mg}{D} \left(-t + \frac{D}{k} \left(1 - \exp \left(-\frac{k}{D} t \right) \right) \right) + h + \frac{mw}{D} \left(1 - \exp \left(-\frac{D}{m} t \right) \right)$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = -\frac{mg}{D} \left(1 - \exp \left(-\frac{D}{m} t \right) \right) + w \exp \left(-\frac{D}{m} t \right)$$

2. 4 行列

行列の計算
 行列の固有値・固有ベクトル
 行列のランク

課題 2. 4 行列の固有値, 固有ベクトル, ランク
 についてまとめなさい。

3. 物理現象の記述と状態量

3. 1 代表的物理量の記述

3. 1. 1 運動方程式 (質量-ばね系)

(1) 重力のない空間で, 図 1 のような「ばね+質量」の振動系がある。上端 $x(t)$ を時間とともに上下動させることを考える。質量の部分 $y(t)$ がどのように動くかを調べたい。質量に着目して運動方程式を立てよう。

ただし, ばねが伸び縮みしていない場合の x と y をそれぞれの原点とする。($x=0, y=0$ であれば, ばねは自然長となっている。) ばねの伸びは $x-y$ で表される。ばねが質量を上向きに引っ張る力は $k(x-y)$ となる。

(2) 重力のない空間で, 図 2 のような「ばね+質量+粘性抵抗」の振動系がある。上端 $x(t)$ を時間とともに上下動させることを考える。質量の部分 $y(t)$ がどのように動くかを調べたい。質量に着目して運動方程式を立てよう。

ただし, ばねが伸び縮みしていない場合の x と y をそれぞれの原点とする。ばねの伸びは $x-y$ で表される。ばねが質量を上向きに引っ張る力は $k(x-y)$ となる。ダンパ部は質量の速度に比例して逆向きの力を生ずるので, ダンパ部が上向きに質量を押し出す力は「 $-D \times$ 質量の上向き速度」で表される。なお D の単位も考えよう。

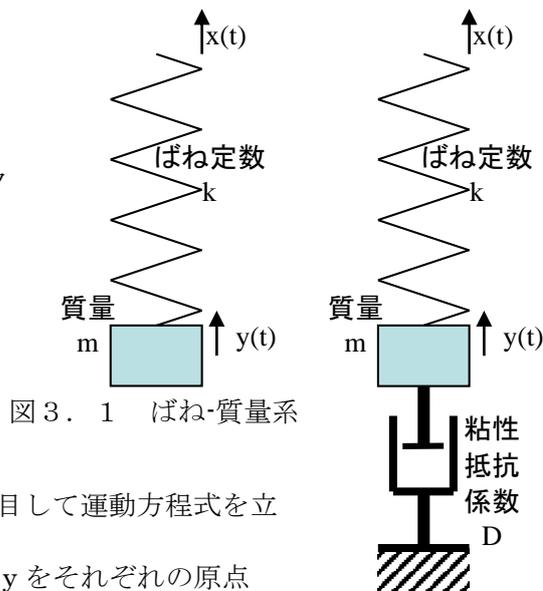


図 3. 1 ばね-質量系

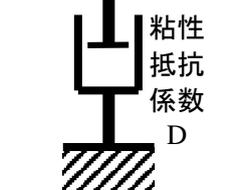


図 3. 2 ばね-抵抗-質量系

3. 1. 2 キルヒホフの定理と LCR 回路

(1) 図 3 の RC 回路において, 入力電圧 $x(t)$ を加えたとき, 出力電圧 $y(t)$ はどうなるか式で表しなさい。抵抗の左端からコンデンサの下の GND に向かって流れる電流を i として,
 $x(t) =$ 抵抗での電圧降下 + コンデンサでの電圧降下
 $y(t) =$ コンデンサでの電圧降下
 の 2 つの式を立てて, $y(t)$ の一階微分の式を作り, i を消去すればよい。



図 3. 3 CR 回路

(2 つの式があるので 1 つの変数を消去することが出来る)

(2) 図 4 の LCR 回路において, 入力電圧 $x(t)$ を加えたとき, 出力電圧 $y(t)$ はどうなるか式で表しなさい。抵抗の左端からコンデンサの下の GND に向かって流れる電流を i として,
 $x(t) =$ 抵抗での電圧降下 + インダクタンスでの電圧降下 + コンデンサでの電圧降下
 $y(t) =$ コンデンサでの電圧降下
 の 2 つの式を立てて, $y(t)$ の一階微分の式, 二階微分の式を作り, i を消去すればよい。

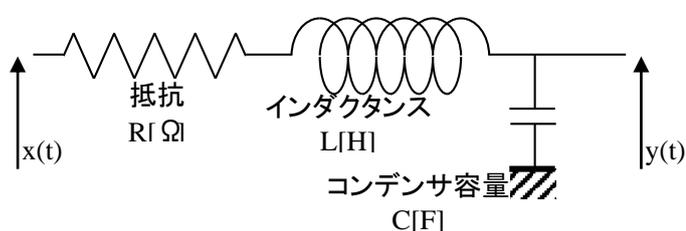


図 3. 4 LCR 回路

(2 つの式があるので 1 つの変数を消去することが出来る)

3. 2 ラプラス変換を用いて方程式を解く

3. 2. 1 運動方程式の解 (質量一ばね系)

(1) ばね-質量系 $m\ddot{y}(t) = k(x(t) - y(t))$

$$m\ddot{y}(t) + ky(t) = kx(t) \quad (3.1)$$

 $y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0$ の時を考える

$$m\ddot{y}(t) + ky(t) = kx(t)$$

手順1) ラプラス変換を行う

$$m(s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)) + kY(s) = kX(s) \quad ms^2Y(s) + kY(s) = kX(s)$$

手順2) Yについて解く

$$Y(s) = \frac{\frac{k}{m}}{s^2 + \frac{k}{m}} X(s)$$

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2} X(s) \quad \text{ただし, } \omega_n^2 = \frac{k}{m} \quad (3.2)$$

ここで $Y(s) = G(s)X(s)$ (出力の s 領域表現 = $G(s)$ × 入力 of s 領域表現) の形をとると $G(s)$ は伝達関数と呼ばれる。

伝達関数は様々な形をとるが、ここでは $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2}$ である。

入力関数を決めないとこれ以上計算ができないので、例として

$$x(t) = u(t) \quad (\text{単位ステップ関数}) \quad X(s) = \frac{1}{s}$$

の場合を解くことにする。

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + \omega_n^2)}$$

手順3) 逆ラプラス変換を行う

ここで部分分数分解を行う

$$\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + \omega_n^2)} = \frac{a}{s} + \frac{bs + c\omega_n}{s^2 + \omega_n^2} \quad \text{とおいて, } a, b, c \text{ を定める。}$$

右辺を通分して両辺の分子を比べると

$$\omega_n^2 = as^2 + a\omega_n^2 + bs^2 + c\omega_n s = (a+b)s^2 + c\omega_n s + a\omega_n^2$$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ c\omega_n=0 \\ a\omega_n^2=\omega_n^2 \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=0 \end{cases}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega_n^2}$$

$$y(t) = 1 - \cos \omega_n t \quad (3.3)$$

(2) ばね-抵抗-質量系 $m\ddot{y}(t) = k(x(t) - y(t)) - D\dot{y}(t)$ $y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0$ の時を考える

$$m\ddot{y}(t) + D\dot{y}(t) + ky(t) = kx(t) \quad (3.4)$$

手順1) ラプラス変換を行う

$$m(s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)) + D(sY(s) - y(0)) + kY(s) = kX(s)$$

$$ms^2Y(s) + DsY(s) + kY(s) = kX(s)$$

単位と計算について

同じ単位を持つ量は加減算を行うことができる

例

$$3\text{m} + 5\text{m} \quad \text{○}$$

$$3\text{m} + 5\text{kg} \quad \text{×}$$

乗除算ではそれぞれの量の単位についても演算ができる

例

$$10\text{m} \div 2\text{sec} = 5\text{m/sec}$$

手順2) Yについて解く

$$Y(s) = \frac{\frac{k}{m}}{s^2 + \frac{D}{m}s + \frac{k}{m}} X(s)$$

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} X(s) \quad (3.5)$$

ただし, $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\zeta = \frac{D}{2\sqrt{mk}}$ 通常は $0 < \zeta < 1$

ここで $Y(s) = G(s)X(s)$ (出力の s 領域表現 = G(s) × 入力 of s 領域表現) の形をとると G(s) は伝達関数と呼ばれる。

伝達関数は様々な形をとるが, ここでは $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ である。

分母が s の二次式の伝達関数を持つモデルは二次遅れ要素と呼ばれている。
入力関数を決めないとこれ以上計算ができないので, 例として

$$x(t) = u(t) \text{ (単位ステップ関数)} \quad X(s) = \frac{1}{s}$$

の場合を解くことにする。

$$Y(s) = \frac{1}{s} \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

手順3) 逆ラプラス変換を行う

ここで部分分数分解を行う

通例に従って, 途中で分母で平方完成を行う $0 < \zeta < 1$ の場合のみを計算することにする

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})^2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})^2} - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})^2}$$

よって

$$y(t) = 1 - \exp(-\zeta\omega_n t) \cos(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t) - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \exp(-\zeta\omega_n t) \sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t) \quad (3.6)$$

$$y(t) = 1 - \exp(-\zeta\omega_n t) \left\{ \cos(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t) \right\} \quad (3.7)$$

この他

$1 < \zeta$ の時は

$$y(t) = 1 + \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \exp\left(-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t\right) - \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \exp\left(-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t\right) \quad (3.8)$$

$\zeta = 1$ の時は

$$y(t) = 1 - (1 + \omega_n t) \exp(-\omega_n t) \quad (3.9)$$

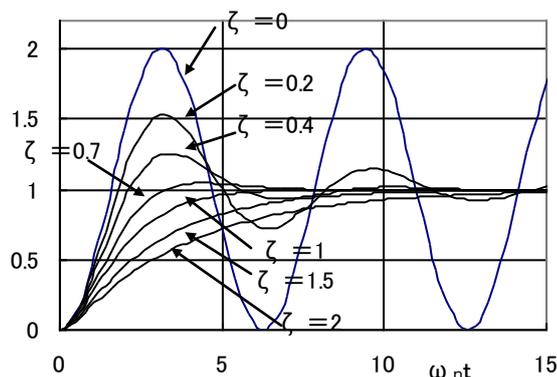


図3.5 ばね-抵抗-質量系（二次遅れ系）の単位ステップ応答

課題3. 2. 1 $1 < \zeta$, $\zeta = 1$ の場合について、自分で計算しなさい。

課題3. 2. 2 $y(t)$ が最大値ピークを持つ条件を求めなさい。

課題3. 2. 3 $y(t)$ が最大値ピークを持つ場合について、 $y(t)$ の傾きが0になる時刻を小さいほうから3つ求めなさい。またその時の $y(t)$ の値を求めなさい。

3. 2. 2 キルヒホフの定理と LCR 回路

(1) RC 回路 $y(0) = 0$ で考える

$$\begin{cases} x(t) = Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt \\ \frac{1}{C} \int i(t) dt = y(t) \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\frac{1}{C} i(t) = \dot{y}(t) \quad \text{より} \quad i(t) = C\dot{y}(t)$$

$$RC\dot{y}(t) + y(t) = x(t)$$

$y(0) = 0$ のもとでラプラス変換して

$$RCsY(s) + Y(s) = X(s)$$

$$Y(s) = \frac{1}{RCs + 1} X(s) \quad (3.11)$$

ここで $Y(s) = G(s)X(s)$ （出力のs領域表現 = $G(s)$ × 入力 of s領域表現）の形をとると $G(s)$ は伝達関数である。

ここでは $G(s) = \frac{1}{Ts + 1}$ である。ただし $T = RC$

分母がsの一次式の伝達関数を持つモデルは一次遅れ要素と呼ばれている。入力関数を決めないとこれ以上計算ができないので、例として

$$x(t) = u(t) \quad (\text{単位ステップ関数}) \quad X(s) = \frac{1}{s}$$

の場合を解くことにする。

$$Y(s) = \frac{1}{Ts + 1} \frac{1}{s} = \frac{1}{s} \frac{1}{T\left(s + \frac{1}{T}\right)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T}}$$

$$y(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t}{T}\right) \quad (3.12)$$



図6 RC回路の(一次遅れ系の)単位ステップ応答

(2) RLC回路 $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ で考える

$$\begin{cases} x(t) = Ri(t) + L\dot{i}(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt \\ \frac{1}{C} \int i(t) dt = y(t) \end{cases} \quad (3.13)$$

$$\frac{1}{C} i(t) = \dot{y}(t) \quad \text{より} \quad i(t) = C\dot{y}(t), \quad \dot{i}(t) = C\ddot{y}(t)$$

$$RC\dot{y}(t) + LC\ddot{y}(t) + y(t) = x(t)$$

$y(0) = \dot{y}(0) = 0$ のもとでラプラス変換して

$$LCs^2Y(s) + RCsY(s) + Y(s) = X(s)$$

$$Y(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} X(s)$$

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} X(s)$$

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} X(s) \quad \text{ただし,} \quad \omega_n = \sqrt{\frac{1}{LC}}, \quad \zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (3.14)$$

ここで $Y(s) = G(s)X(s)$ の形をとると

$$\text{伝達関数 } G(s) \text{ は } G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \text{ である。}$$

分母が s の二次式の伝達関数を持つモデルは二次遅れ要素と呼ばれている。
単位ステップ応答はばね-抵抗-質量系と同じとなる。

4. 基本的なフィードバック制御（伝達関数と s 領域で入出力）

4. 1 DC モータ駆動と機械的時定数, ゲイン

現在位置: $\theta(t)$ [rad]

現在角速度: $\omega(t)$ [rad/s]

モータの軸の周りの慣性モーメント: J [kgm²]

モータの指令電圧: $v_m(t)$ [V]

モータの内部抵抗: R [Ω]

モータの電流: $i(t)$ [A]

モータの逆起電圧: $v_\omega(t)$ [V]

モータの発生トルク: $\tau(t)$ [N · m]

指令電圧に関する式についてはキルヒホフの法則により

$$v_m(t) = Ri(t) + v_\omega(t) \quad (4.1)$$

(インダクタンス L は非常に小さいと仮定している)

となる。逆起電圧は軸の角速度に比例するので、

$$v_\omega(t) = K_\omega \omega(t) \quad (4.2)$$

モータの発生トルクは電流に比例するので

$$\tau(t) = K_\tau i(t) \quad (4.3)$$

となる。また、モータの軸の周りに関する回転系の運動方程式は

$$J\dot{\omega}(t) = \tau(t) - D\omega(t) \quad (4.4)$$

となる。ただし $D\omega(t)$ は角速度に比例して止めようとする空気などの抵抗を表します。

回路に関する3式 (4.1) (4.2) (4.3) を (4.4) に代入すると

$$J\dot{\omega}(t) = K_\tau \left(\frac{v_m(t)}{R} - \frac{K_\omega}{R} \omega(t) \right) - D\omega(t) \quad (4.5)$$

$$\frac{J}{\left(\frac{K_\tau K_\omega}{R} + D \right)} \dot{\omega}(t) + \omega(t) = \frac{K_\tau}{K_\tau K_\omega + DR} v_m(t) \quad (4.6)$$

ここでモータに加える電圧 $v_m(t)$ の代わりに PWM 信号値 $p(t)$ を与えることとする。

PWM デューティ比を $\frac{p(t)}{p_{\max}}$, 電源電圧を $v_{m\max}$ で与えれば、

$$v_m(t) = \frac{v_{m\max}}{p_{\max}} p(t) \text{ で換算されるので}$$

$$T\dot{\omega}(t) + \omega(t) = Kp(t) \quad (4.7)$$

を得る。ただし、 $T = \frac{J}{\left(\frac{K_\tau K_\omega}{R} + D \right)}$, $K = \frac{K_\tau K_m}{K_\tau K_\omega + DR} \frac{v_{m\max}}{p_{\max}}$

ラプラス変換すると

$$Ts\Omega(s) + \Omega(s) = KP(s) \quad (4.8)$$

$$\Omega(s) = \frac{K}{Ts+1} P(s), \text{ すなわち伝達関数は } G_1(s) = \frac{K}{Ts+1} \quad (4.9)$$

$\dot{\theta}(t) = \omega(t)$, とおけば

$$T\ddot{\theta}(t) + \dot{\theta}(t) = Kp(t) \quad (4.10)$$

$$\Theta(s) = \frac{K}{s(Ts+1)} P(s), \text{ すなわち伝達関数は } G_2(s) = \frac{K}{s(Ts+1)} \quad (4.11)$$

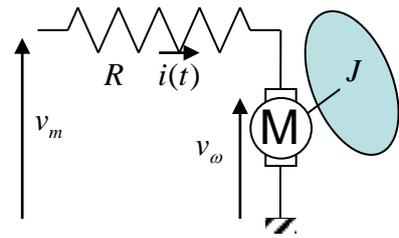


図7 DC モータのモデル

モータの PWM 駆動
 モータの PWM (Pulse Width Modulation パルス幅変調) 駆動とはモータに与える電源の ON-OFF を高速に繰り返し、ON-OFF 周期に対する ON の継続時間を調節することでモータを駆動する方法である。
 (ON-OFF の周期) を PWM 周期, (ON の継続時間/PWM 周期) をデューティ比と呼ぶ。

4. 1 App K, T の同定 (実際の測定から K, T を求める)

モータへの電圧指令値 $p(t)$ に対応する指令値関数 (実際には PWM 信号値で高速 ON-OFF 駆動のデューティ比を制御する関数) $p(t)$ に大きさが a のステップ関数を使用することになると、

$$p(t) = au(t), \quad P(s) = \frac{a}{s} \quad (4.12)$$

$$\Omega(s) = \frac{K}{Ts+1} P(s) = \frac{K}{Ts+1} \frac{a}{s} = \frac{Ka}{T} \frac{1}{s \left(s + \frac{1}{T} \right)} = Ka \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T}} \right) \quad (4.13)$$

$$\omega(t) = Ka \left(1 - \exp \left(-\frac{1}{T} t \right) \right) \quad (4.14)$$

モータ軸 (実は減速機軸) には回転角度センサ (ロータリエンコーダ) がついている。1 回転 800 パルスの性能のものである。制御中は 10ms ごとに角度情報を得られるので、角速度は 10ms ごとの角度の差分で求めている。

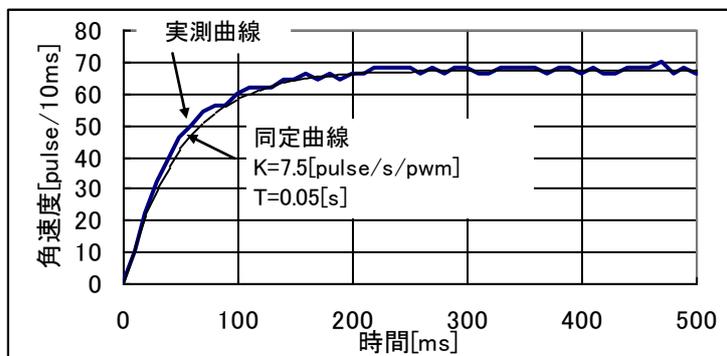


図 8 モータ指令値 $a = 900$ [pwm] を続けた場合のステップ応答結果 (PWM 値は ± 1000 の間をとり、1000 でデューティ比 100% となる)

この結果 $Ka = 6800$ [pulse/s] なので、 $K = 7.5$ [pulse/s/pwm]、 $T = 0.05$ [s] を得ることができる。

4. 2 DC モータを用いた位置決め制御系 (位置フィードバック制御)

モータの角度変位を指示した角度 (目標値) でぴたりと止めたい。どのようにモータ指令値を与えたらよいか考える。ただし、モータ指令値 a は $-P$ から $+P$ までの値であり (実験例では -1000 から 1000)、プラスは正転指令値、マイナスは逆転指令値を表す。指令値 0 はモータに電力を供給しないことを現す。

目標値の手前なら、先に進め、行き過ぎたら逆に進めるようにモータ指令値を与えるのがよいだろう。しかもモータ指令値の絶対値は、目標値と現在位置の差に比例するようにすればよいだろう。このような考え方はフィードバック制御と呼ばれる。しかも位置情報のみをフィードバックするので、位置フィードバック制御と呼ばれる。

モータへの入力 $p(t)$ を次式のように目標値 $\theta_r(t)$ と、現在位置 $\theta(t)$ から生成する。

ここに k_p は位置フィードバックゲインと呼ばれる。

$$p(t) = k_p (\theta_r(t) - \theta(t)) \quad (4.15)$$

$$T \ddot{\theta}(t) + \dot{\theta}(t) = Kp(t) \quad (4.16)$$

この状態のブロック線図は次のようになっている。

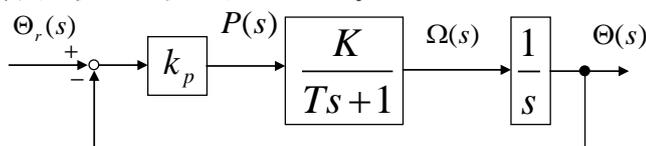


図 B1 位置フィードバック制御ブロック線図表現

上記2式をまとめて

$$T\ddot{\theta}(t) + \dot{\theta}(t) = Kk_p(\theta_r(t) - \theta(t)) \quad (4.17)$$

ラプラス変換して

$$Ts^2\Theta(s) + s\Theta(s) = Kk_p(\Theta_r(s) - \Theta(s)) \quad (4.18)$$

$$(Ts^2 + s + Kk_p)\Theta(s) = Kk_p\Theta_r(s) \quad (4.19)$$

$$\Theta(s) = \frac{Kk_p}{Ts^2 + s + Kk_p}\Theta_r(s) \quad (4.20)$$

$$\Theta(s) = \frac{\frac{Kk_p}{T}}{s^2 + \frac{1}{T}s + \frac{Kk_p}{T}}\Theta_r(s) \quad (4.21)$$

$$\Theta(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\Theta_r(s) \quad \text{ただし, } \omega_n^2 = \frac{Kk_p}{T}, \quad \zeta = \frac{1}{2\sqrt{TKk_p}} \quad (4.22)$$

$$\text{伝達関数は } G_3(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (4.23)$$

目標値を $\theta_r(t)$ を大きさ b のステップ関数で与えると、一定の目標値 b を与えたことになる。

$$\Theta_r(s) = \frac{b}{s} \quad \text{なので}$$

$$\Theta(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\Theta_r(s) = \frac{b}{s} \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = b \left(\frac{1}{s} \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right) \quad (4.24)$$

よって

$$\theta(t) = b \left[1 - \exp(-\zeta\omega_n t) \left\{ \cos(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t) \right\} \right] \quad (4.25)$$

4. 2 APP 実験による位置決め制御の確認 (位置フィードバック制御)

200pulse の位置 (1/4 回転) を目標にしたステップ応答 (位置決め制御) を実行した $T = 0.05$ [s], $K = 7.5$ [pulse/s/pwm] より, k_p の値により, ω_n , ζ が定まる。

k_p [pwm/pulse]	ω_n [rad/s]	ζ [-]
5	27	0.37
10	39	0.26
20	55	0.18
40	77	0.13

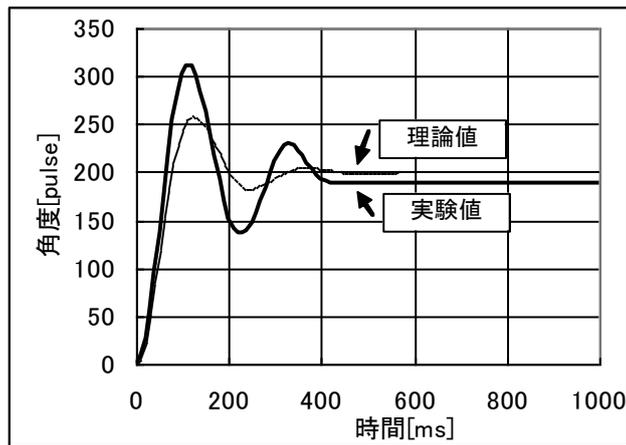


図9 DC モータのステップ応答 $k_p = 5$ [pwm/pulse]

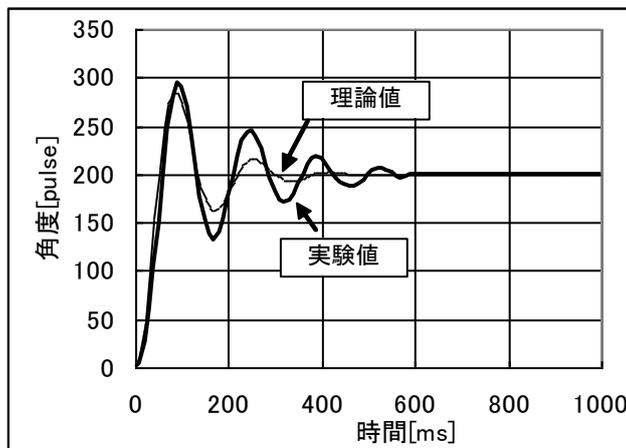


図10 DC モータのステップ応答 $k_p = 10$ [pwm/pulse]

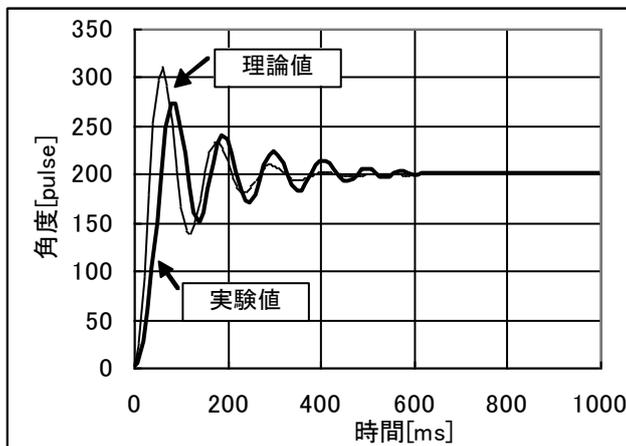


図11 DC モータのステップ応答 $k_p = 20$ [pwm/pulse]

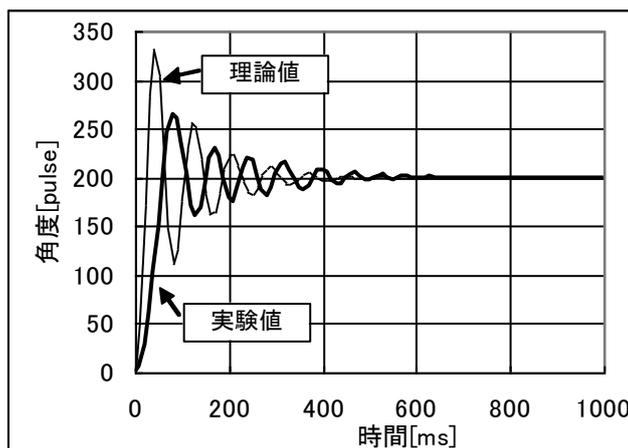


図 12 DC モータのステップ応答 $k_p = 40$ [pwm/pulse]

k_p の値が大きくなると、起動直後のモータ指令 PWM 値は 1000 をはるかに超える。(例えば $k_p = 40$ なら起動時 PWM 値は 8000) 理論計算ではこのようなことが起こっても、実際には 1000 以上の PWM 値は 1000 に切り戻して使われるため、実験値の方が遅い応答となる。

4. 3 DC モータを用いた位置決め制御系 (位置フィードバック制御+速度フィードバック)

4. 2 の位置フィードバックによる制御では振動が収まるまでに時間がかかっているのがわかる。これに対し、理論的には ζ をもうすこし大きくすることができれば、振動をはやく収めることができる。振動して困るときはどろどろの油の中に漬けてしまえば、振動が低減する現象を利用することと同じ考え方である。

ここで速度に比例した止めようとする指令値を導入することにして次のような指令値算出法を使用する。

モータへの入力 $p(t)$ を次式のように目標値 $\theta_r(t)$ と、現在位置 $\theta(t)$ と速度情報 (位置差分) から生成する。ここに Δ [s] は短い時間、 k_v [pwm s/pulse] は速度フィードバックゲインと呼ばれる。

$$p(t) = k_p(\theta_r(t) - \theta(t)) - k_v\dot{\theta}(t) \quad \dot{\theta}(t) = \frac{\theta(t) - \theta(t - \Delta)}{\Delta} \quad (4.26)$$

$$T\ddot{\theta}(t) + \dot{\theta}(t) = Kp(t) \quad (4.27)$$

この状態をブロック線図を次に示す。

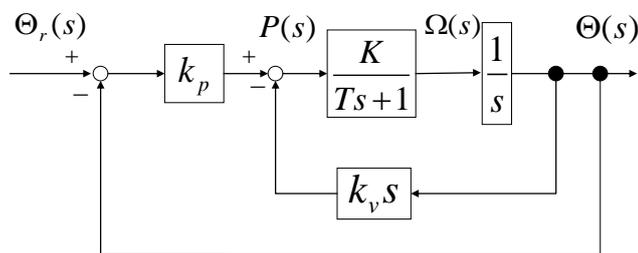


図 B2 位置フィードバック制御+速度フィードバックのブロック線図表現

上記 2 式より

$$T\ddot{\theta}(t) + \dot{\theta}(t) = K(k_p(\theta_r(t) - \theta(t)) - k_v\dot{\theta}(t)) \quad (4.28)$$

$$Ts^2\Theta(s) + s\Theta(s) = K(k_p(\Theta_r(s) - \Theta(s)) - k_v s\Theta(s)) \quad (4.29)$$

$$(Ts^2 + (1 + Kk_v)s + Kk_p)\Theta(s) = Kk_p\Theta_r(s) \quad (4.30)$$

$$\Theta(s) = \frac{Kk_p}{Ts^2 + (1 + Kk_v)s + Kk_p} \Theta_r(s) \quad (4.31)$$

$$\Theta(s) = \frac{\frac{Kk_p}{T}}{s^2 + \frac{1 + Kk_v}{T}s + \frac{Kk_p}{T}} \Theta_r(s) \quad (4.32)$$

$$\Theta(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \Theta_r(s) \quad \text{ただし, } \omega_n^2 = \frac{Kk_p}{T}, \quad \zeta = \frac{1 + Kk_v}{2\sqrt{TKk_p}} \quad (4.33)$$

伝達関数は $G_3(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ で前項と同じである。

目標値を $\theta_r(t)$ を大きさ b のステップ関数で与えると、その後の計算には変更なく、次のようになる。

$0 \leq \zeta < 1$ の時

$$\theta(t) = b \left[1 - \exp(-\zeta\omega_n t) \left\{ \cos(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t) \right\} \right] \quad (4.34)$$

$1 < \zeta$ の時

$$y(t) = b \left[1 + \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \exp\left(-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t\right) - \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \exp\left(-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t\right) \right] \quad (4.35)$$

$\zeta = 1$ の時

$$y(t) = b[1 - (1 + \omega_n t)\exp(-\omega_n t)] \quad (4.36)$$

課題 4. 3. 1 実際のモータでは $p(t) = k_p(\theta_r(t) - \theta(t)) - k_v\dot{\theta}(t)$ の代わりに

$p(t) = k_p(\theta_r(t) - \theta(t)) - k_{v0}(\dot{\theta}(t) - \dot{\theta}(t - \Delta))$ を使っている。

$\Delta = 10$ [msec] として、 k_{v0} と k_v の換算方法を述べなさい。

4. 3 APP 実験による位置決め制御の確認 (位置フィードバック + 速度フィードバック制御)
 200pulse の位置 (1/4 回転) を目標にしたステップ応答 (位置決め制御) を実行した
 $T = 0.05$ [s], $K = 7.5$ [pulse/s/pwm] を同定結果より得、 $k_p = 20$ [pwm/pulse] を固定すると、 k_v [pwm s/pulse] の値により、 ω_n , ζ が定まる。

k_v [pwm s/pulse]	ω_n [rad/s]	ζ [-]
0.1	55	0.32
0.2	55	0.46
0.4	55	0.73
0.8	55	1.28
1.6	55	2.37

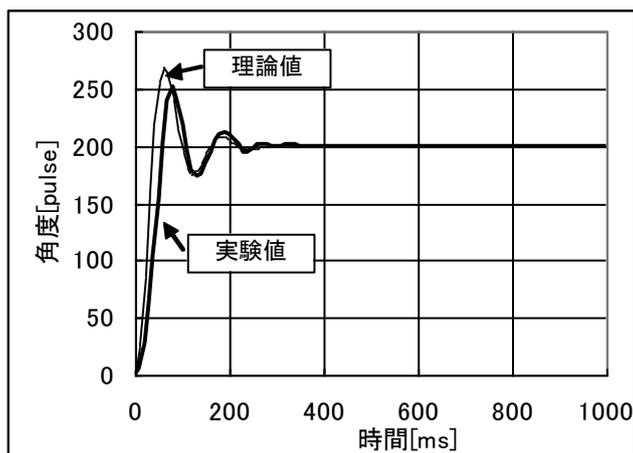


図 13 DC モータのステップ応答 $k_p = 20$ [pwm/pulse], $k_v = 0.1$ [pwm s/pulse]

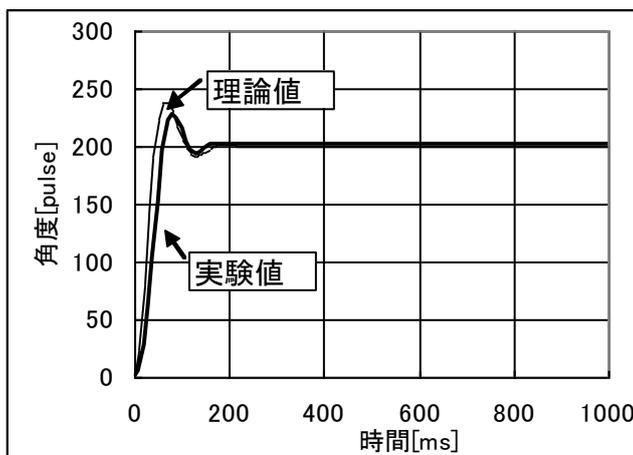


図 14 DC モータのステップ応答 $k_p = 20$ [pwm/pulse], $k_v = 0.2$ [pwm s/pulse]

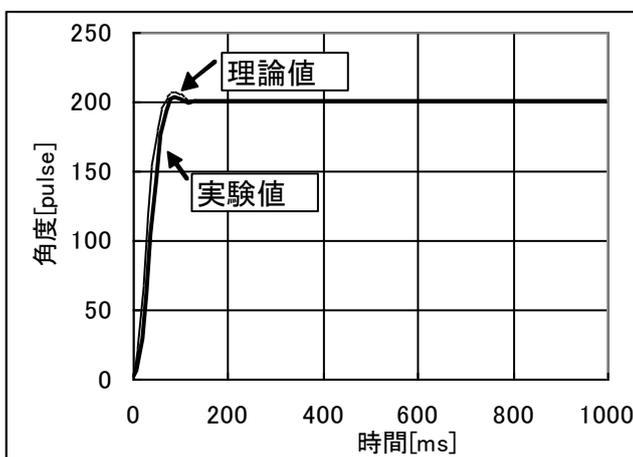


図 15 DC モータのステップ応答 $k_p = 20$ [pwm/pulse], $k_v = 0.4$ [pwm s/pulse]

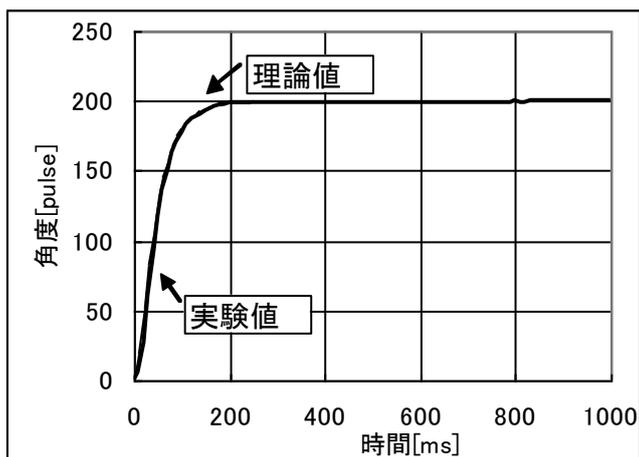


図 16 DC モータのステップ応答 $k_p = 20$ [pwm/pulse], $k_v = 0.8$ [pwm s/pulse]

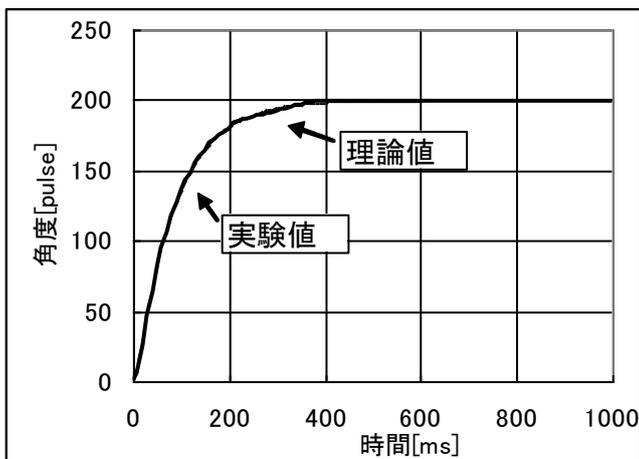


図 17 DC モータのステップ応答 $k_p = 20$ [pwm/pulse], $k_v = 1.6$ [pwm s/pulse]

課題 4. 3. 2 「4. 3 APP」の最初で ω_n , ζ を計算して表を作っているが、どのようにして計算したのか、計算過程を述べなさい

課題 4. 3. 3 DC モータのステップ応答において ω_n , ζ の役割を述べなさい

課題 4. 3. 4 DC モータのステップ応答において k_p , k_v の役割を述べなさい

4. 4 DC モータを用いた位置決め制御系 (ランプ応答とフィードバック制御)

時間に比例して増加している関数はランプ関数であるが、目標値がランプ関数の場合のフィードバック制御を考える。ランプ応答では、位置フィードバック P と速度フィードバック D だけでは定常偏差が生ずることが知られている。そこで積分フィードバック I が追加される。ここでは、積分フィードバックも加えた解析を行っておく。

$$p(t) = k_p(\theta_r(t) - \theta(t)) - k_v\dot{\theta}(t) + k_i \int_0^t (\theta_r(t) - \theta(t)) dt \quad \dot{\theta}(t) = \frac{\theta(t) - \theta(t - \Delta)}{\Delta} \quad (4.37)$$

$$T\ddot{\theta}(t) + \dot{\theta}(t) = Kp(t) \quad (4.38)$$

この状態のブロック線図を次に示す。

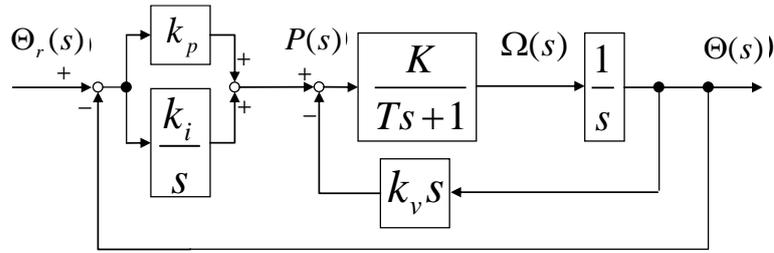


図 B3 PID 制御系のブロック線図

上記 2 式より

$$T \ddot{\theta}(t) + \dot{\theta}(t) = K \left(k_p (\theta_r(t) - \theta(t)) - k_v \dot{\theta}(t) + k_i \int_0^t (\theta_r(t) - \theta(t)) dt \right) \quad (4.39)$$

$$Ts^2 \Theta(s) + s \Theta(s) = K \left(k_p (\Theta_r(s) - \Theta(s)) - k_v s \Theta(s) + \frac{k_i}{s} (\Theta_r(s) - \Theta(s)) \right) \quad (4.40)$$

$$(Ts^3 + (1 + Kk_v)s^2 + Kk_p s + Kk_i) \Theta(s) = (Kk_p s + Kk_i) \Theta_r(s) \quad (4.41)$$

$$\Theta(s) = \frac{Kk_p s + Kk_i}{Ts^3 + (1 + Kk_v)s^2 + Kk_p s + Kk_i} \Theta_r(s) \quad (4.42)$$

伝達関数 $G(s)$ は次式となる。

$$G(s) = \frac{Kk_p s + Kk_i}{Ts^3 + (1 + Kk_v)s^2 + Kk_p s + Kk_i} \quad (4.43)$$

この伝達関数をもとに、ステップ応答も求めることができるが、見通しが悪いため、最終値の定理を用いて定常偏差を求めることにする。

さて図 B3 を変形して偏差 $E(s) = \Theta_r(s) - \Theta(s)$ を求めるため、図 B4 を用いる。

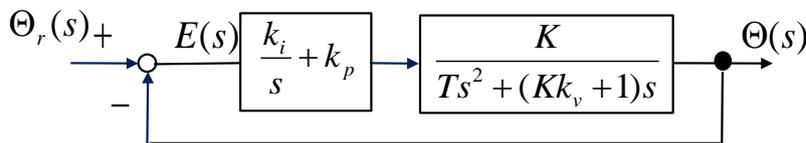


図 B4 PID 制御系のブロック線図

偏差は次式となる。

$$E(s) = \frac{Ts^3 + (1 + Kk_v)s^2}{Ts^3 + (1 + Kk_v)s^2 + Kk_p s + Kk_i} \Theta_r(s)$$

定常偏差は入力関数によって異なる

(1) 入力がステップ関数 $\theta_r(t) = au(t)$ の場合は、 $\Theta_r(s) = \frac{a}{s}$ であり、定常位置偏差は次のように求められ、定常偏差は残らないことを示している。

$$e_p = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{Ts^3 + (1 + Kk_v)s^2}{Ts^3 + (1 + Kk_v)s^2 + Kk_p s + Kk_i} \frac{a}{s} = 0$$

(2) 入力がランプ関数 $\theta_r(t) = at$ の場合は、 $\Theta_r(s) = \frac{a}{s^2}$ であり、

定常速度偏差は次のように求められる。

(2. 1) $k_i = 0$ すなわち、積分フィードバックがない時は、

$$e_v = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{Ts^3 + (1 + Kk_v)s^2}{Ts^3 + (1 + Kk_v)s^2 + Kk_p s} \frac{a}{s^2} = \frac{1 + Kk_v}{Kk_p} a$$

となり、定常偏差 $e_v = \frac{1 + Kk_v}{Kk_p} a$ が残ることを示している。

(2. 1) $k_i \neq 0$ すなわち、積分フィードバックがある時は、

$$e_v = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{Ts^3 + (1 + Kk_v)s^2}{Ts^3 + (1 + Kk_v)s^2 + Kk_p s + Kk_i s^2} \frac{a}{s^2} = 0$$

となり、定常偏差は残らないことを示している。

また、積分フィードバックを用いる場合は、積分フィードバックゲイン (k_i) によっては不安定になることが知られている。

ナイキストの安定判別を行うことにすると、一巡伝達関数 (*1) を求め、周波数一巡伝達関数のベクトル軌跡を描き、周波数を 0 から ∞ に向けてたどる時、-1 を右側に見ると (自分がアリさんになってベクトル軌跡上を歩くとき右側に見ると) 不安定、左側に見ると安定であるとされる。

*1 一巡伝達関数 (補足)

フィードバック制御系を単純化すると図 B5 のようになっているが、フィードバック結合部を切り離して図 B6 のようにした $G(s)H(s)$ を一巡伝達関数と呼ぶ。

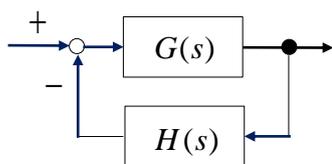


図 B5 フィードバック制御系

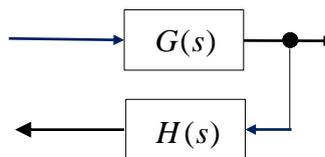


図 B6 一巡伝達関数

一巡伝達関数は次式で表わされる。

$$G_0(s) = \frac{Kk_p s + Kk_i}{s^2(Ts + 1 + Kk_v)}$$

周波数一巡伝達関数は次式で表わされる。

$$G_0(j\omega) = \frac{Kk_i + jKk_p \omega}{-\omega^2(jT\omega + 1 + Kk_v)} = \frac{-K(k_i + jk_p \omega)}{\omega^2(1 + Kk_v + jT\omega)}$$

$$|G_0(j\omega)| = \frac{K\sqrt{k_i^2 + k_p^2 \omega^2}}{\omega^2 \sqrt{(1 + Kk_v)^2 + T^2 \omega^2}} \quad \angle(G_0(j\omega)) = -\pi + \tan^{-1} \frac{k_p \omega}{k_i} - \tan^{-1} \frac{T\omega}{1 + Kk_v}$$

なので、ベクトル軌跡は

$\omega = 0$ の時、実軸負の無限遠、その後 $\omega \rightarrow$ 大きくしながら、偏角をみると、

$$\angle(G_0(j\omega)) = -\pi + \alpha, \quad \alpha = \tan^{-1} \frac{k_p \omega}{k_i} - \tan^{-1} \frac{T\omega}{1 + Kk_v}, \quad \text{関数 } \tan^{-1} \text{ は単調増加である。}$$

したがって、 $\frac{k_p \omega}{k_i} < \frac{T\omega}{1 + Kk_v}$ の時、 $\alpha < 0$ なので、ベクトル軌跡は、実軸負側の上部を通って原

点に達し、 $\frac{T\omega}{1 + Kk_v} \leq \frac{k_p \omega}{k_i}$ の時、 $0 \leq \alpha$ なので、ベクトル軌跡は、実軸負側上にあるか、実軸負側の下部を通って原点に達することがわかる。

すなわち

$$J_{stable} = \frac{k_p}{k_i} - \frac{T}{1 + Kk_v} \geq 0 \text{ の時, 安定となり,}$$

$$J_{stable} = \frac{k_p}{k_i} - \frac{T}{1 + Kk_v} < 0 \text{ の時, 不安定になることがわかる。}$$

実際の DC モータで、目標値が1000[pulse/s]で増加していくランプ応答を実行した。実験結果を次に示す。

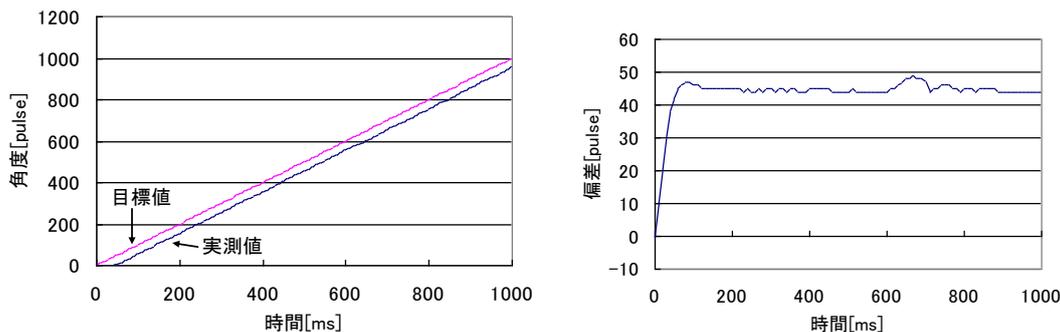


図18 DC モータランプ応答, 目標値と現在値の変位

$$k_p = 5[pwm / pulse], k_v = 0.2[pwm s / pulse], k_i = 0.0[pwm / (pulse s)]$$

図18は積分フィードバックがない場合に対応しており、定常偏差が生じ、指令値に対し、遅れているのがわかる、理論定常偏差は、

$$e_v = \frac{1 + Kk_v}{Kk_p} a = \frac{1 + 7.5 \times 0.2}{7.5 \times 5} \times 1000 = 66.7[pulse]$$

となっている。

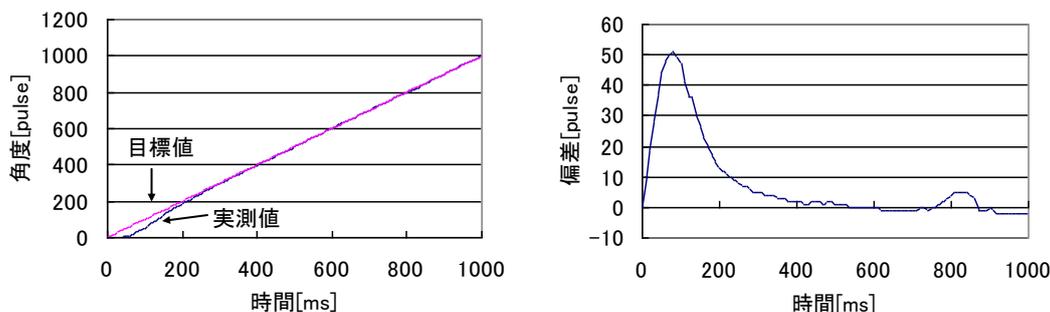


図19 DC モータランプ応答, 目標値と現在値の変位

$$k_p = 5[pwm / pulse], k_v = 0.2[pwm s / pulse], k_i = 30[(pwm / pulse s)]$$

図19は定常偏差がなくなっているのがわかる。安定判別は次式で可能で

$$J_{stable} = \frac{k_p}{k_i} - \frac{T}{1 + Kk_v} = \frac{5}{30} - \frac{0.05}{1 + 7.5 \times 0.2} = 0.147 \geq 0$$

これは、安定の場合の判別値である。

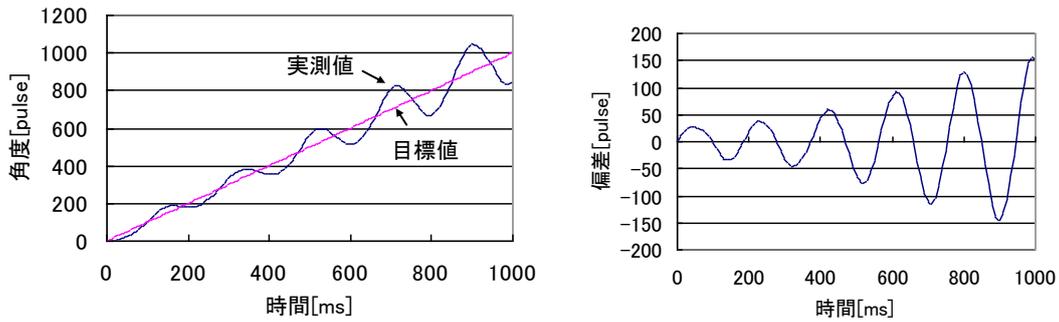


図 2 0 DC モータランプ応答と目標値との変位

$$k_p = 5[pwm / pulse], k_v = 0.2[pwm s / pulse], k_i = 300[pwm / (pulse s)]$$

図 2 0 は不安定になっているのがわかる。安定判別は次式で可能で

$$J_{stable} = \frac{k_p}{k_i} - \frac{T}{1 + Kk_v} = \frac{5}{300} - \frac{0.05}{1 + 7.5 \times 0.2} = -0.00333 < 0$$

これは不安定の場合の判別値である。

この結果から、積分フィードバックの導入によりランプ入力において目標値と現在位置の偏差を無くすることができるがわかる。しかし、積分フィードバックゲインを大きくとりすぎると発振が起こり不安定になってしまうことがわかる。

参考までに一巡伝達関数のナイキスト線図（一巡伝達関数のベクトル軌跡）を図 2 1 に示す。

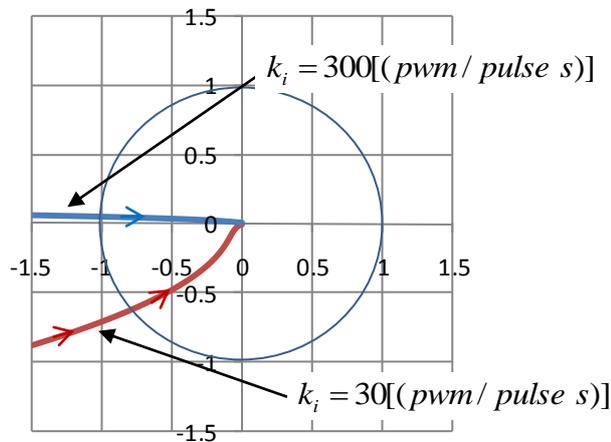


図 2 1 位置・速度・積分フィードバックを持った系のナイキスト線図

$$k_p = 5[pwm / pulse], k_v = 0.2[pwm s / pulse]$$

この結果から $k_i = 300[pwm / pulse s]$ では $(-1, j0)$ の点を右に見て原点に近づいていくため不安定となっている。したがって、実験結果と同様に不安定であるということがわかった。

4. 5 安定判別

4. 4にてナイキストの安定判別を行ったが、安定判別について一般的に補足説明する。制御系が安定であるとは、インパルス応答やステップ応答が収束することである。ここでは単位ステップ応答について考える。一般に単位ステップ応答は

$$y(s) = L^{-1}(G(s)X(s)) = L^{-1}\left(G(s)\frac{1}{s}\right)$$

である。ここでは $G(s)$ は伝達関数である。

$$G(s)X(s) = \frac{P(s)}{sQ(s)}$$

と表すことができる。制御系で、 $P(s)$ と $Q(s)$ では、 $Q(s)$ の方が高い次数を持つのが一般的である。分母は s の実係数多項式なので、複素数の範囲まで因数分解することを考えると

$$Q(s) = (s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)\cdots(s-s_n)$$

となる。 $Q(s)=0$ は特性方程式と呼ばれ、その解 $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ は特性解と呼ばれる。もしこの s_i 中に複素数があった場合は、共役複素数ペアが必ず含まれる。

$G(s)X(s)$ は部分分数に分解され、

$$G(s)X(s) = \frac{K_0}{s} + \frac{K_1}{s-s_1} + \frac{K_2}{s-s_2} + \frac{K_3}{s-s_3} + \cdots + \frac{K_n}{s-s_n}$$

となる。これを逆ラプラス変換すると

$$L^{-1}\left(\frac{K_0}{s}\right) = K_0$$

これは定数なので収束していると考えてよい。そしてこの項の由来は $X(s)$ である。

もし s_i が実数であれば

$$L^{-1}\left(\frac{K_i}{s-s_i}\right) = K_i \exp(s_i t) (= K_i e^{s_i t})$$

となる。もし s_i が負であればこの項は収束するが、正であればこの項は発散する。またもし s_i が虚数であれば $s_i = a_i + jb_i$ 書くことが出来、共役複素数 $s_{i+1} = a_i - jb_i$ も含まれるため、その2つを合わせることにする。

$$\begin{aligned} L^{-1}\left(\frac{K_i}{s-s_i} + \frac{K_{i+1}}{s-s_{i+1}}\right) &= L^{-1}\left(\frac{K_i}{s-(a_i + jb_i)} + \frac{K_{i+1}}{s-(a_i - jb_i)}\right) \\ &= L^{-1}\left(\frac{A(s-a_i) + Bb_i}{(s-a_i)^2 + b_i^2}\right) = A \exp(a_i t) \cos b_i t + B \exp(a_i t) \sin b_i t \\ & (= A e^{a_i t} \cos b_i t + B e^{a_i t} \sin b_i t) \end{aligned}$$

となる。ここで A, B は $\frac{K_i}{s-(a_i + jb_i)} + \frac{K_{i+1}}{s-(a_i - jb_i)} = \frac{A(s-a_i) + Bb_i}{(s-a_i)^2 + b_i^2}$ から係数比較法で求められる定数である。もし a_i が負であればこの項 $A \exp(a_i t) \cos b_i t + B \exp(a_i t) \sin b_i t$ は収束するが、 a_i が正であればこの項は発散する。

これらのことをまとめると

これらのことをまとめると

伝達関数 $G(s)$ の「分母=0」の式、すなわち特性方程式 $Q(s)=0$ のすべての解(特性解)の実部が負であれば、その制御系の単位インパルス応答 $y(s)$ は収束し、安定である。

このことは次のようにも言い表せる

伝達関数 $G(s)$ のすべての極 ($G(s)$ の分母=0 にする s_i) が複素平面上の左半面にあれば, その制御系は安定である。

特性方程式の解の実部の符号で制御系の安定判別ができる。
 そこで, 実係数多項式の解の実部の符号判定方法が考えだされている。

4. 5. 1 Routh の方法

特性方程式 $a_0s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + a_3s^{n-3} + \dots + a_1s + a_n = 0$ を持つ制御系が安定であるための条件

- (1) $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ がすべて同符号である。(0 を含んではいけない)
- (2) Routh の行列の第 1 列がすべて正である。

Routh の行列の例 ($n=7$) $a_0s^7 + a_1s^6 + a_2s^5 + a_3s^4 + a_4s^3 + a_5s^2 + a_6s + a_7 = 0$

a_0	a_2	a_4	a_6	$b_1 = \frac{a_1a_2 - a_3a_0}{a_1}$	$b_2 = \frac{a_1a_4 - a_5a_0}{a_1}$	$b_3 = \frac{a_1a_6 - a_7a_0}{a_1}$
a_1	a_3	a_5	a_7	$c_1 = \frac{b_1a_3 - b_2a_1}{b_1}$	$c_2 = \frac{b_1a_5 - b_3a_1}{b_1}$	$c_3 = \frac{b_1a_7 - 0a_1}{b_1}$
b_1	b_2	b_3		$d_1 = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{c_1}$	$d_2 = \frac{c_1b_3 - c_3b_1}{c_1}$	$e_1 = \frac{d_1c_2 - d_2c_1}{d_1}$
c_1	c_2	c_3		$e_1 = \frac{d_1c_3 - 0c_1}{d_1}$	$f_1 = \frac{e_1d_2 - e_2d_1}{e_1}$	$g_1 = \frac{f_1e_2 - 0e_1}{f_1}$
d_1	d_2					
e_1	e_2					
f_1						
g_1						

例 特性方程式 $s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 50s + 24 = 0$ を持つ制御系の安定判別を行う。

- (1) 係数はすべて存在し, すべて正数である。
- (2) Routh の行列を作る

\bar{I}	35	24	1) $\frac{10 \cdot 35 - 50 \cdot 1}{10} = 30$
10	50		2) $\frac{10 \cdot 24 - 0 \cdot 1}{10} = 24$
1)30	2)24		3) $\frac{30 \cdot 50 - 24 \cdot 10}{30} = 42$
3)42			4) $\frac{42 \cdot 24 - 0 \cdot 30}{42} = 24$
4)24			

Routh の行列の第 1 列はすべて正である。

- (1) (2) よりこの制御系は安定である。

4. 5. 2 Hurwitz の方法

特性方程式 $a_0s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + a_3s^{n-3} + \dots + a_1s + a_n = 0$ を持つ制御系が安定であるための条件

- (1) $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ がすべて同符号である。(0 を含んではいけない)
- (2) Hurwitz の行列式および小行列式の値がすべて正である。

Hurwitz の行列の例 ($n=7$) $a_0s^7 + a_1s^6 + a_2s^5 + a_3s^4 + a_4s^3 + a_5s^2 + a_6s + a_7 = 0$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \end{pmatrix}$$

Hurwitz の小行列式および Hurwitz の行列式

$$\Delta_1 = a_1 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & 0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} \quad \dots$$

$$\Delta_7 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \end{vmatrix}$$

ここで $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \Delta_5, \Delta_6$ が Hurwitz の小行列式で、 Δ_7 が Hurwitz の行列式である。

例 特性方程式 $s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 50s + 24 = 0$ を持つ制御系の安定判別を行う。

- (1) 係数はすべて存在し、すべて正数である。
- (2) Hurwitz の行列および小行列式を作る

$$\begin{pmatrix} 10 & 50 & 0 & 0 \\ 1 & 35 & 24 & 0 \\ 0 & 10 & 50 & 0 \\ 0 & 1 & 35 & 24 \end{pmatrix} \quad \Delta_1 = 10 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 10 & 50 \\ 1 & 35 \end{vmatrix} = 10 \cdot 35 - 50 \cdot 1 = 300$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 10 & 50 & 0 \\ 1 & 35 & 24 \\ 0 & 10 & 50 \end{vmatrix} = 50 \begin{vmatrix} 10 & 50 \\ 1 & 35 \end{vmatrix} - 10 \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 1 & 24 \end{vmatrix} = 15000 - 2400 = 12600$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 10 & 50 & 0 & 0 \\ 1 & 35 & 24 & 0 \\ 0 & 10 & 50 & 0 \\ 0 & 1 & 35 & 24 \end{vmatrix} = 24 \begin{vmatrix} 10 & 50 & 0 \\ 1 & 35 & 24 \\ 0 & 10 & 50 \end{vmatrix} = 302400$$

Hurwitz の行列式および小行列式の値がすべて正である

- (1) (2) よりこの制御系は安定である。

4. 5. 3 Nyquist の安定判別

Routh および Hurwitz の方法では、安定度がわからない、特性根を扱っているため、直感的でない。一巡伝達関数の実測値が与えられたときに使えないなどの困難があった。

Nyquist の安定判別

制御系の一巡伝達関数のベクトル軌跡 (Nyquist 線図) を描き, $\omega = 0$ から $\omega \rightarrow \infty$ へとたどるとき, -1 が左側にあれば, その制御系は安定となる。

一般にフィードバック制御系は図 2 2 の構成であり, その伝達関数は

$$G_{feedback}(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

であり, 一巡伝達関数は図 2 3 で $G(s)H(s)$ のように定義される。

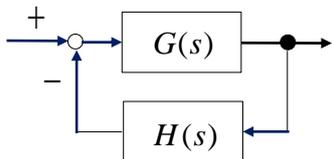


図 2 2 フィードバック制御系

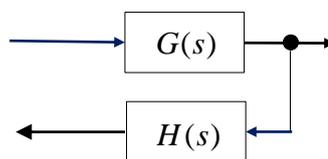


図 2 3 一巡伝達関数

4. 5の冒頭で述べたように, 安定な制御系の伝達関数 $G_{feedback}(s)$ のすべての極は複素平面の左半面にある。

ここで極をプロットした複素平面を, $G(s)H(s)$ で写像する。特性方程式は

$1 + G(s)H(s) = 0$ なので, 極 s_i は $1 + G(s_i)H(s_i) = 0$ を満たすため, $G(s)H(s)$ で写像するとすべての極 s_i は -1 に移る。(図 2 4) なお, $G(s)H(s)$ は正則な関数なので, その写像は等角写像となり, 写像後形はゆがむが, 点の相対的位置関係は変わらない。

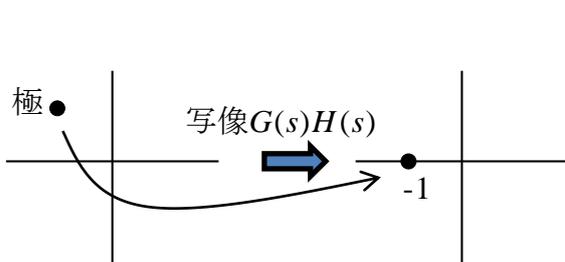


図 2 4 $G(s)H(s)$ で写像

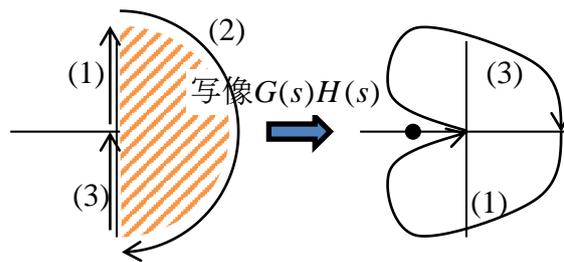


図 2 5 右半面を $G(s)H(s)$ で写像

極が左半面にあるかどうかを写像後の平面で確認するため, 元の平面の右半面を同じ $G(s)H(s)$ で写像する。(図 2 5) 写像された右半面領域の外に -1 (写像された極) があれば, 写像前の複素平面ですべての極は左半面にあったと考えることができる。

右半面の写像は半径 R の右半円を写像し, $R \rightarrow \infty$ とすればよい。(図 2 5)

半径 R の右半円の写像は, 図 2 5 に示す 3 区間に分割し, 次のように行う。

(1) $s = 0 + j\omega$ と置き, $\omega = 0 \rightarrow \infty$ とすればよい。すなわち $G(j\omega)H(j\omega)$ で $\omega = 0 \rightarrow \infty$ なので, $G(s)H(s)$ のベクトル軌跡を描くことに一致する。ただし, $\omega \rightarrow \infty$ のとき, $G(j\omega)H(j\omega) = 0$ となる。

(2) $s = R e^{j\theta}$ と置き, $\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ とすればよい。一般に $G(s)H(s)$ は分母の次数の方が分子の次数より大きいので, $R \rightarrow \infty$ の時, $G(R e^{j\theta})H(R e^{j\theta}) = 0$ となる。

(3) $s = 0 + j\omega$ と置き, $\omega = -\infty \rightarrow 0$ とすればよい。すなわち $G(j\omega)H(j\omega)$ で $\omega = -\infty \rightarrow 0$ なので, (1) で描いた $G(s)H(s)$ のベクトル軌跡を実軸対称移動させ, 逆順に描くことに一致する。ただし, $\omega \rightarrow -\infty$ のとき, $G(j\omega)H(j\omega) = 0$ となる。

この結果, 写像先の複素平面で, 「一巡伝達関数のベクトル軌跡 (Nyquist 線図)」を描き, $\omega = 0 \rightarrow \infty$ とたどるとき, 制御系の極が写像された -1 が左側にあれば, 写像元の複素平面では, 極は左半面に存在していたことになり, この制御系は安定と判定される。

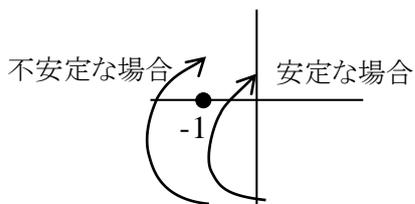
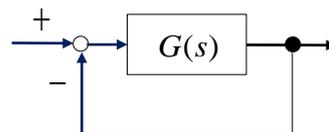


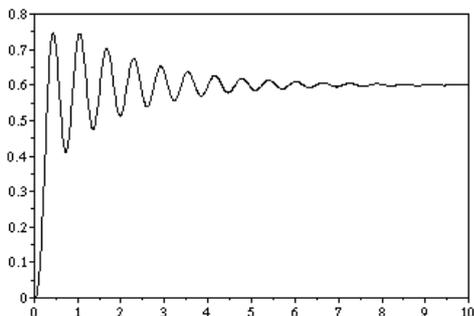
図 2 6 Nyquist の安定判別
一巡伝達関数のベクトル軌跡 (Nyquist 線図) を描いたところ

Scilab で描いた Nyquist 線図の例を次に示す。制御系は次に示す直結フィードバックである。等価伝達関数は

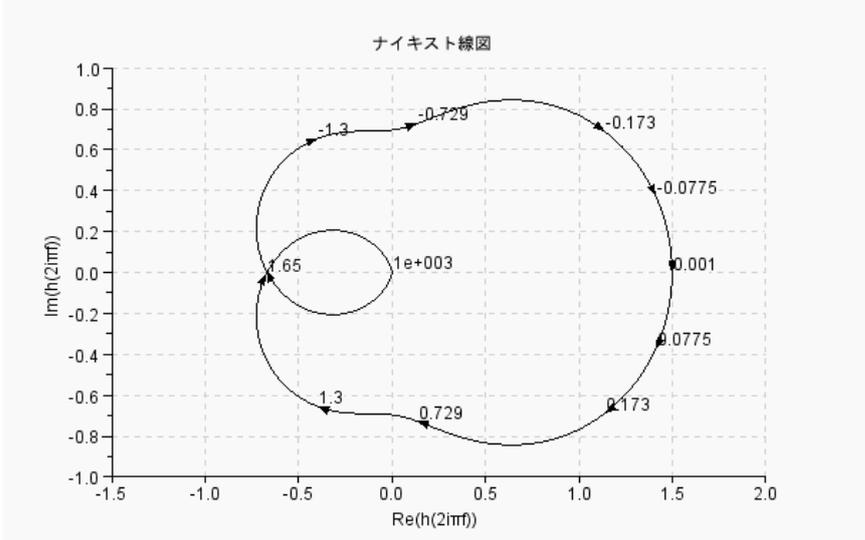
$$G_{feedback}(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$



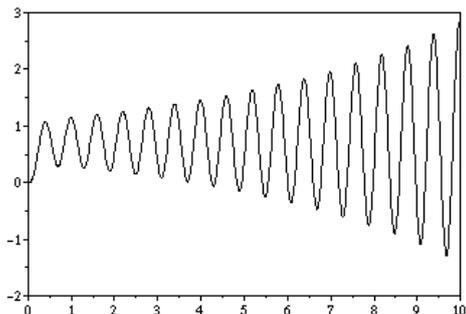
例 1 $G(s) = \frac{300}{(s+2)(s^2+4s+100)}$
単位ステップ応答 (安定, 収束している)



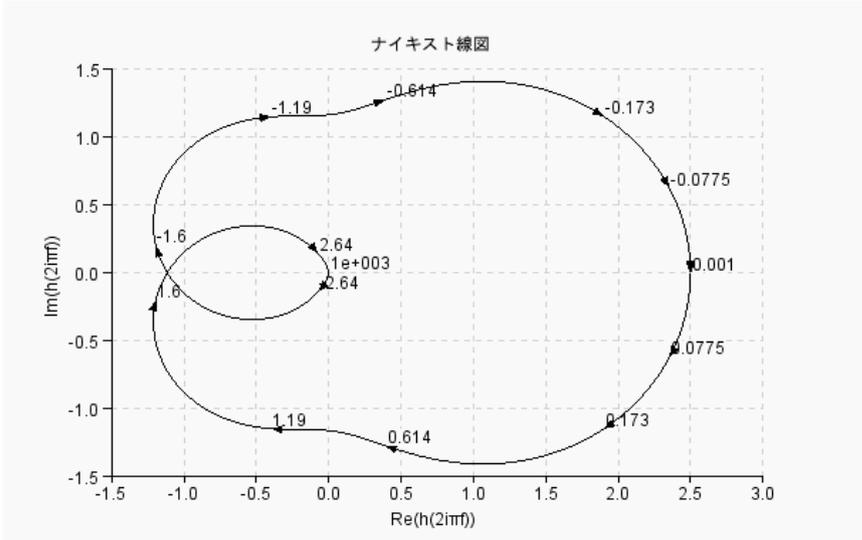
Nyquist 線図 ($\omega = 0 \rightarrow \infty$ とたどるとき, -1 を左側に見ながら進んでいる)



例 2 $G(s) = \frac{500}{(s+2)(s^2+4s+100)}$
単位ステップ応答 (不安定, 発散している)



Nyquist 線図 ($\omega=0 \rightarrow \infty$ とたどるとき, -1 を右側に見ながら進んでいる)



4. 5. 4 Nyquist の安定判別を Bode 線図上で行う

図 2 7 に示すように, Nyquist の安定判別では -1 を左側に見ながら通過すれば安定というだけでなく, -1 からどれだけ離れて通過するのか, すなわち安定度までわかる。すなわち, 点 P_1 が -1 からどれだけ離れているのか, 点 Q_1 は角度 -180° よりどれだけ角度として離れているかがわかる。この Nyquist 線図をそのまま図 2 8 のようにボード線図に変換すると, 安定度を数値で表すことができる。

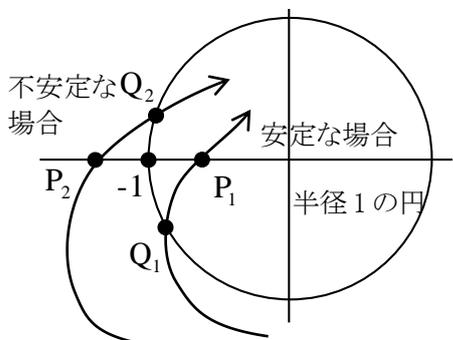


図 2 7 -1 との間合い

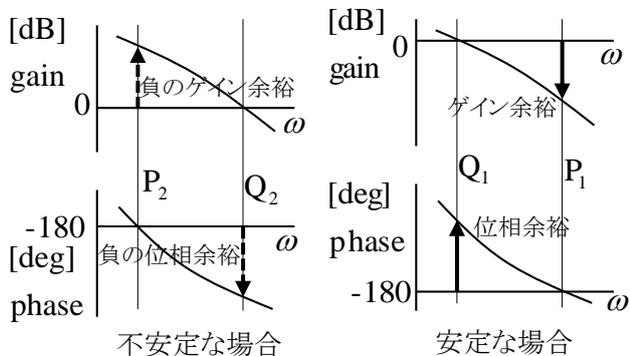


図 2 8 ボード線図とゲイン余裕・位相余裕

一般に, Nyquist 線図が負の実軸上を横切る点を P , 半径 1 の円を横切る点を Q としその時の角周波数をそれぞれ ω_p , ω_Q とすると,

ゲイン余裕は位相余裕は次のようにあらわされる。

$$\text{ゲイン余裕} \quad -20\log(|G(j\omega_p)H(j\omega_p)|) \quad [dB]$$

$$\text{位相余裕} \quad \angle(G(j\omega_q)H(j\omega_q))+180 \quad [\text{deg}]$$

4. 6. 補足 周波数応答

あるシステムに正弦波を入力すると、周波数は変化せず、振幅と位相が変化した正弦波が出力される。

入力信号 $x(t)$ と出力信号 $y(t)$ が次のように表されるとき、ゲインと位相は次のように表される。

$$x(t) = a \sin \omega t$$

$$y(t) = b \sin(\omega t + \alpha)$$

ゲイン	$ b/a $	((出力振幅/入力振幅)の絶対値)
位相	α	(符号が負のときは遅れを表す)

ω を変化させたときのゲインと位相の変化の様子は、周波数応答と呼ばれる。そして、

あるシステムの伝達関数が $G(s)$ で表されるならば、
ゲイン = $ b/a = G(j\omega) $
位相 = $\alpha = \angle G(j\omega)$

で表される。

この関係を吟味してみよう。

あるシステムへの入力信号を、

$$x(t) = a \sin \omega t, \quad X(s) = \frac{a\omega}{s^2 + \omega^2}$$

とする。

システムの入出力関係は次式となる。

$$Y(s) = G(s)X(s) = aG(s) \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$G(s) \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ の極を $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, j\omega, -j\omega$ とすると

(特性解=特性方程式の解, 特性方程式とは $G(s) \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ の分母=0 のことである)

$$\begin{aligned} aG(s) \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} &= aG(s) \frac{\omega}{(s - j\omega)(s - (-j\omega))} \\ &= \frac{K_1}{s - s_1} + \frac{K_2}{s - s_2} + \frac{K_3}{s - s_3} + \dots + \frac{K_n}{s - s_n} + \frac{K_+}{s - j\omega} + \frac{K_-}{s - (-j\omega)} \end{aligned}$$

のように展開される。これを逆ラプラス変換すると $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ に由来する項はすべて 0 に収束する。(不安定常解が存在する場合を考えている。虚数解の場合でも共役解があり問題ない)

ここで

$$aG(s) \frac{\omega}{(s-j\omega)(s-(-j\omega))} = \frac{K_1}{s-s_1} + \frac{K_2}{s-s_2} + \frac{K_3}{s-s_3} + \dots + \frac{K_n}{s-s_n} + \frac{K_+}{s-j\omega} + \frac{K_-}{s-(-j\omega)}$$

の両辺に $s-j\omega$ をかけて、 $s \rightarrow j\omega$ に近づけると

$$\frac{aG(j\omega)}{j2} = K_+$$

$$aG(s) \frac{\omega}{(s-j\omega)(s-(-j\omega))} = \frac{K_1}{s-s_1} + \frac{K_2}{s-s_2} + \frac{K_3}{s-s_3} + \dots + \frac{K_n}{s-s_n} + \frac{K_+}{s-j\omega} + \frac{K_-}{s-(-j\omega)}$$

の両辺に $s-(-j\omega)$ をかけて、 $s \rightarrow -j\omega$ に近づけると

$$-\frac{aG(-j\omega)}{j2} = K_-$$

十分時間が経過したときの定常解は

$$y_{steady}(t) = L^{-1} \left(\frac{K_+}{s-j\omega} + \frac{K_-}{s-(-j\omega)} \right)$$

$$y_{steady}(t) = L^{-1} \left(\frac{aG(j\omega)}{j2} \frac{1}{s-j\omega} - \frac{aG(-j\omega)}{j2} \frac{1}{s-(-j\omega)} \right)$$

$$y_{steady}(t) = \frac{aG(j\omega)}{j2} e^{j\omega t} - \frac{aG(-j\omega)}{j2} e^{-j\omega t}$$

ここで、 $|G(j\omega)| = A$ 、 $\angle(G(j\omega)) = \theta$ ならば、 $G(j\omega) = Ae^{j\theta}$ 、 $G(-j\omega) = Ae^{-j\theta}$ なので、

($G(j\omega)$ と $G(-j\omega)$ は、共役複素数であり、 $Ae^{j\theta}$ と $Ae^{-j\theta}$ も共役複素数であるため)

$$y_{steady}(t) = \frac{aAe^{j\theta}}{j2} e^{j\omega t} - \frac{aAe^{-j\theta}}{j2} e^{-j\omega t} = aA \frac{e^{j(\omega t + \theta)} - e^{-j(\omega t + \theta)}}{j2}$$

$$y_{steady}(t) = aA \sin(\omega t + \theta)$$

結局、あるシステムへの入力信号が

$$x(t) = a \sin \omega t$$

のとき、定常出力は

$$y_{steady}(t) = aA \sin(\omega t + \theta)$$

になった。これは $y_{steady}(t) = b \sin(\omega t + \alpha)$ のことである。

すなわち、

$$\text{ゲイン} = |b/a| = |aA/a| = |A| = |G(j\omega)|$$

$$\text{位相} = \alpha = \theta = \angle G(j\omega)$$

5. 現代制御理論のアプローチ

状態量, 状態空間の扱い

5. 1 制御系の状態表現

$$\text{例 } u(t) \rightarrow \boxed{\text{二次遅れ要素}} \rightarrow y(t) \quad \ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = u(t)$$

ここからの $u(t)$ は単位ステップ関数ではないことに注意,これまで一般入力として $x(t)$ を使っていたのを $u(t)$ で表す。

5. 1. 1 古典制御理論の伝達関数表現

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = u(t) \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0 \text{ とする}$$

ラプラス変換して

$$s^2 y(s) + 3s y(s) + 2y(s) = u(s) \quad (\text{今後はラプラス変換しても関数を小文字で表す。})$$

$$y(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} u(s)$$

$$\text{伝達関数は } G(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

特性方程式 (「伝達関数の分母」=0) は $s^2 + 3s + 2 = 0$ 特性根 (特性解, 特性方程式の解) は $s = -2, -1 \quad \because s^2 + 3s + 2 = (s+2)(s+1) = 0$ (a) 単位インパルス応答 入力 $u(t)$ が単位インパルス関数とすると $u(s) = 1$ なので

$$y(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} u(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{(s+2)(s+1)} = -\frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+1}$$

$$y(t) = -\exp(-2t) + \exp(-t)$$

(b) 入力が $u(t) = 0$ で $y(0) = 1, \dot{y}(0) = 0$ の場合

$$(s^2 y(s) - s y(0) - \dot{y}(0)) + 3(s y(s) - y(0)) + 2y(s) = u(s)$$

$$(s^2 y(s) - s) + 3(s y(s) - 1) + 2y(s) = 0$$

$$s^2 y(s) + 3s y(s) + 2y(s) = s + 3$$

$$y(s) = \frac{s+3}{s^2 + 3s + 2} = \frac{s+3}{(s+2)(s+1)} = -\frac{1}{s+2} + \frac{2}{s+1}$$

$$y(t) = -\exp(-2t) + 2\exp(-t)$$

5. 1. 2 状態表現

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = u(t)$$

$$\begin{cases} y(t) = x_1(t) \\ \dot{y}(t) = x_2(t) = \dot{x}_1(t) \end{cases} \quad \text{とおくと}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = -3\dot{y}(t) - 2y(t) + u(t) = -3x_2(t) - 2x_1(t) + u(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2x_1(t) - 3x_2(t) + u(t) \end{cases}$$

よって

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \quad (5.1)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

ここで $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$, $\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix}$ とおくと

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \quad \text{状態方程式} \quad (5.3)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) \quad \text{出力（観測）方程式} \quad (5.4)$$

と表記することができる。

一般的には

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \quad \text{状態方程式} \quad (5.5)$$

$$y(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t) \quad \text{出力（観測）方程式} \quad (5.6)$$

$\mathbf{x}(t)$ 状態変数 (n次元列(縦)ベクトル)

\mathbf{A} (n×nマトリクス)

\mathbf{b} (n次元列(縦)ベクトル)

\mathbf{c} (n次元行(横)ベクトル)

式(5.3)(5.4)では

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

である。

(5.5)(5.6)の表現を「制御系 $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 」「システム $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 」と呼ぶ。

状態変数 $\mathbf{x}(t)$ はn次元ベクトル空間上を点が時間とともに移動すると考えられる。

このn次元ベクトル空間のことを「状態空間」と呼ぶ。

状態空間を利用した解析方法を「状態空間法」と呼ぶ。

(古典制御での解析手法は「伝達関数法」)

課題 5.1.1 $\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 4y(t) = u(t)$ を状態変数で表しなさい。また $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ をどのように設定すればよいか求めなさい。

5.2 状態方程式の解

5.2.1 定数変化法

5.2.1.1 準備

一元一階微分方程式の例

$$\dot{x}(t) = ax(t) + u(t) \quad (5.2.1.1)$$

$$x(0) = x_0$$

(1) $u(t) = 0$ のもとで同次系一般解を得る

$$\dot{x}(t) - ax(t) = 0 \quad (5.2.1.2)$$

ここで $x(t) = x_0 \exp(\lambda t)$ とおくと $x(0) = x_0$ は満足している。

$\dot{x}(t) = \lambda x_0 \exp(\lambda t)$ なので式(5.2.1.2)に代入して

$$\lambda x_0 \exp(\lambda t) - ax_0 \exp(\lambda t) = 0$$

$$(\lambda - a)x_0 \exp(\lambda t) = 0 \quad a = \lambda \quad \text{よって}$$

$$x(t) = x_0 \exp(at) \quad (\text{同次系一般解}) \quad (5.2.1.3)$$

(2) 非同次系一般解は一般解の定数を関数と置き換えて解く

$$x(t) = x_0 \exp(at) \rightarrow x(t) = z(t) \exp(at) \quad \text{とおくと}$$

$$\dot{x}(t) = az(t) \exp(at) + \dot{z}(t) \exp(at) \quad \text{最初の式(5.2.1.1)に代入して}$$

$$az(t) \exp(at) + \dot{z}(t) \exp(at) - az(t) \exp(at) = u(t)$$

$$\dot{z}(t) \exp(at) = u(t) \rightarrow \dot{z}(t) = \exp(-at)u(t) \quad \text{積分して}$$

$$z(t) = \int_0^t \exp(-a\tau)u(\tau)d\tau + z(0) = \int_0^t \exp(-a\tau)u(\tau)d\tau + x(0)$$

$$x(t) = \left\{ \int_0^t \exp(-a\tau)u(\tau)d\tau + x(0) \right\} \exp(at)$$

$$x(t) = \int_0^t \exp(a(t-\tau))u(\tau)d\tau + x_0 \exp(at) \quad (\text{非同次系一般解}) \quad (5.2.1.4)$$

ここで式 (5.2.1.2) において $x(t) = x_0 \exp(\lambda t)$ とおいたのは

$$x(t) = x_0 \left(1 + \frac{\lambda t}{1!} + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \frac{(\lambda t)^3}{3!} + \dots \right)$$

と置いたのと同じである。

課題 5. 2. 1 式 (5.2.1.2) において

$$x(t) = x_0 \left(1 + \frac{\lambda t}{1!} + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \frac{(\lambda t)^3}{3!} + \dots \right)$$

とにおいて、同次系一般解を求めなさい。

5. 2. 1. 2 状態方程式の解

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \quad (5.2.1.5)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

(1) $u(t) = 0$ のもとで同次系一般解を得る

$$\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t) = 0 \quad (5.2.1.6)$$

ここで $\mathbf{x}(t) = \left(\mathbf{I} + \frac{\lambda t}{1!} + \frac{\lambda^2 t^2}{2!} + \frac{\lambda^3 t^3}{3!} + \dots \right) \mathbf{x}_0$ と置く (掛け算の順番注意)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \lambda \left(\mathbf{I} + \frac{\lambda t}{1!} + \frac{\lambda^2 t^2}{2!} + \frac{\lambda^3 t^3}{3!} + \dots \right) \mathbf{x}_0$$

式 (5.2.1.6) に代入すると

$$\lambda \left(\mathbf{I} + \frac{\lambda t}{1!} + \frac{\lambda^2 t^2}{2!} + \frac{\lambda^3 t^3}{3!} + \dots \right) \mathbf{x}_0 - \mathbf{A} \left(\mathbf{I} + \frac{\lambda t}{1!} + \frac{\lambda^2 t^2}{2!} + \frac{\lambda^3 t^3}{3!} + \dots \right) \mathbf{x}_0 = 0$$

$$(\lambda - \mathbf{A}) \left(\mathbf{I} + \frac{\lambda t}{1!} + \frac{\lambda^2 t^2}{2!} + \frac{\lambda^3 t^3}{3!} + \dots \right) \mathbf{x}_0 = 0$$

よって $\lambda = \mathbf{A}$ であるから

$$\mathbf{x}(t) = \left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}t}{1!} + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 t^3}{3!} + \dots \right) \mathbf{x}_0 \quad (\text{同次系一般解}) \quad (5.2.1.7)$$

ここで

$$\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}t}{1!} + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 t^3}{3!} + \dots$$

と定義すると

$$\mathbf{x}(t) = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}_0 \quad (\text{同次系一般解の } \exp(\mathbf{A}t) \text{ を用いた別表現}) \quad (5.2.1.8)$$

なお、 $\exp(\mathbf{A}t)$ には次のような都合のよい性質がある

$$(1) \exp(\mathbf{A}0) = \mathbf{I} \quad (\text{これは } \exp(\mathbf{A}t) \text{ の定義より明らか})$$

$$(2) \frac{d}{dt} \exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{A} \exp(\mathbf{A}t) \quad (\text{これも } \exp(\mathbf{A}t) \text{ の定義より明らか})$$

$$(3) \exp(\mathbf{A}(t_1 + t_2)) = \exp(\mathbf{A}t_1)\exp(\mathbf{A}t_2) \quad (\text{定義より展開すれば説明可能})$$

$$(4) (\exp(\mathbf{A}t))^{-1} = \exp(-\mathbf{A}t) \quad (\exp(\mathbf{A}t)\exp(-\mathbf{A}t) = \mathbf{I} \text{より明らか})$$

(2) 本論にもどって, (5.2.1.8) について定数変化法を使う。

$$\mathbf{x}(t) = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{z}(t) \quad (5.2.1.9) \quad \text{とおくと}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\exp(\mathbf{A}t)\mathbf{z}(t) + \exp(\mathbf{A}t)\dot{\mathbf{z}}(t)$$

であり, これらを (5.2.1.5) に代入すると

$$\mathbf{A}\exp(\mathbf{A}t)\mathbf{z}(t) + \exp(\mathbf{A}t)\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\exp(\mathbf{A}t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{b}u(t)$$

$$\exp(\mathbf{A}t)\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{b}u(t)$$

$$(\exp(\mathbf{A}t))^{-1}\exp(\mathbf{A}t)\dot{\mathbf{z}}(t) = (\exp(\mathbf{A}t))^{-1}\mathbf{b}u(t)$$

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \exp(-\mathbf{A}t)\mathbf{b}u(t)$$

両辺を積分すると

$$\mathbf{z}(t) = \int_0^t \exp(-\mathbf{A}\tau)\mathbf{b}u(\tau)d\tau + \mathbf{z}(0)$$

$$\mathbf{x}(0) = \exp(\mathbf{A}0)\mathbf{z}(0), \quad \exp(\mathbf{A}0) = \mathbf{I} \text{なので}$$

$$\mathbf{z}(t) = \int_0^t \exp(-\mathbf{A}\tau)\mathbf{b}u(\tau)d\tau + \mathbf{x}(0)$$

(5.2.1.9) に代入する。

$$\mathbf{x}(t) = \exp(\mathbf{A}t)\left(\int_0^t \exp(-\mathbf{A}\tau)\mathbf{b}u(\tau)d\tau + \mathbf{x}(0)\right)$$

$$\mathbf{x}(t) = \exp(\mathbf{A}t)\int_0^t \exp(-\mathbf{A}\tau)\mathbf{b}u(\tau)d\tau + \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}(0)$$

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t \exp(\mathbf{A}t)\exp(-\mathbf{A}\tau)\mathbf{b}u(\tau)d\tau + \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}(0)$$

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t \exp(\mathbf{A}(t-\tau))\mathbf{b}u(\tau)d\tau + \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}(0)$$

5. 2. 2 ラプラス変換による解

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \quad (5.2.2.1)$$

をラプラス変換して

$$s\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\mathbf{x}(s) + \mathbf{b}u(s) \quad (5.2.2.2)$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}(s) = \mathbf{b}u(s) + \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0 + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}u(s) \quad (5.2.2.3)$$

逆ラプラス変換する

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right\}\mathbf{x}_0 + \mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}u(s)\right\} \quad (5.2.2.4)$$

$$\text{ここで } (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{s}\left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}}{s} + \frac{\mathbf{A}^2}{s^2} + \frac{\mathbf{A}^3}{s^3} + \dots\right) = \mathbf{I} \quad \text{なので}$$

$$\frac{1}{s}\left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}}{s} + \frac{\mathbf{A}^2}{s^2} + \frac{\mathbf{A}^3}{s^3} + \dots\right) \text{は } (s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \text{の逆行列である。ここで}$$

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right\}$$

とおくと

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mathbf{I}}{s} + \frac{\mathbf{A}}{s^2} + \frac{\mathbf{A}^2}{s^3} + \frac{\mathbf{A}^3}{s^4} + \dots\right\}$$

$$\Phi(t) = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2}{2!}t^2 + \frac{\mathbf{A}^3}{3!}t^3 + \frac{\mathbf{A}^4}{4!}t^4 + \dots$$

なので

$$\Phi(t) = \exp(\mathbf{A}t) \quad (5.2.2.5)$$

$\Phi(t) = \exp(\mathbf{A}t)$ は状態推移行列と呼ばれる。

よって (5.2.2.4) は

$$\mathbf{x}(t) = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}_0 + \int_{\tau=0}^t \exp(\mathbf{A}(t-\tau))\mathbf{b}u(\tau)d\tau \quad (5.2.2.6)$$

5. 3 状態推移行列

状態推移行列 $\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}((s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}) = \exp(\mathbf{A}t)$ の求め方

(1) 直接 $\exp(\mathbf{A}t)$ を計算する。→コンピュータ向き

(2) ラプラス変換を用いて $\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}((s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1})$ より計算する

$$\text{例 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} s\mathbf{I} - \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{pmatrix}}{s^2 + 3s + 2} = \frac{\begin{pmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{pmatrix}}{(s+2)(s+1)} = \begin{pmatrix} \frac{s+3}{(s+2)(s+1)} & \frac{1}{(s+2)(s+1)} \\ \frac{-2}{(s+2)(s+1)} & \frac{s}{(s+2)(s+1)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-1}{s+2} + \frac{2}{s+1} & \frac{-1}{s+2} + \frac{1}{s+1} \\ \frac{2}{s+2} + \frac{-2}{s+1} & \frac{2}{s+2} + \frac{-1}{s+1} \end{pmatrix}$$

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}((s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}) = \begin{pmatrix} -\exp(-2t) + 2\exp(-t) & -\exp(-2t) + \exp(-t) \\ 2\exp(-2t) - 2\exp(-t) & 2\exp(-2t) - \exp(-t) \end{pmatrix}$$

行列 \mathbf{A} の固有値は, -1, -2 であった。

課題 5. 3. 1 次の状態を表す行列 \mathbf{A} において, その固有値と

状態推移行列 $\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}((s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}) = \exp(\mathbf{A}t)$ を求めなさい。

ただし (2) 以降は要素 (1, 1) のみでよい。

$$(1) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} \quad (2) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \quad (3) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(4) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -13 & 4 \end{pmatrix} \quad (5) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -13 & -4 \end{pmatrix}$$

課題 5. 3. 2 「課題 5. 3. 1」より, 固有値と状態推移行列の特徴 (特に収束と発散, 振動項がある場合は振動数の大小) を抜き出して考察しなさい。

5. 4 入力がない場合の状態推移と表現

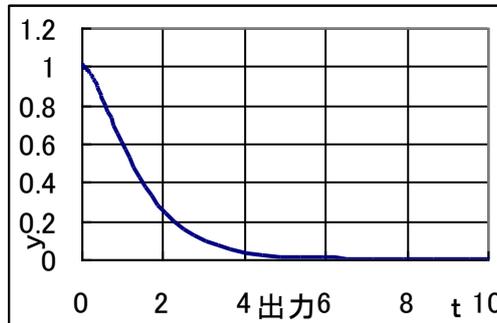
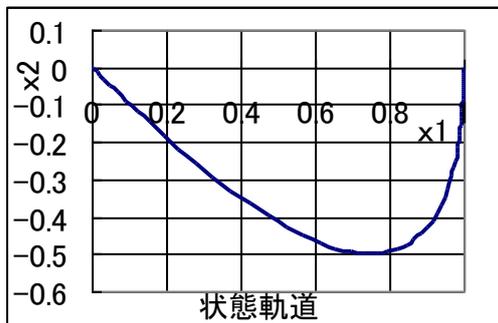
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

例 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = (1 \ 0)$, $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする。

$$\mathbf{x}(t) = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}_0$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\exp(-2t) + 2\exp(-t) & -\exp(-2t) + \exp(-t) \\ 2\exp(-2t) - 2\exp(-t) & 2\exp(-2t) - \exp(-t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\exp(-2t) + 2\exp(-t) \\ 2\exp(-2t) - 2\exp(-t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$y(t) = (1 \ 0) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = -\exp(-2t) + 2\exp(-t)$$



ここで出力に, $\exp(-2t)$, $\exp(-t)$ が出てきたが, t の係数 $-2, -1$ は, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ の固有値に等しい。

課題 5. 4. 1 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = (1 \ 0)$, $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

において入力がない場合の状態軌道と出力を求め, グラフに表示しなさい。
そして, 出力の式における $\exp()$ の t の係数と \mathbf{A} の固有値を比較しなさい。

課題 5. 4. 2 次の \mathbf{A} , \mathbf{c} , \mathbf{x}_0 の系において入力がない場合の出力を求め,
グラフに表示しなさい。

そして, 出力の式における $\exp()$ の t の係数と \mathbf{A} の固有値を比較しなさい。

(1) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = (1 \ 0)$, $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(2) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = (1 \ 0)$, $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(3) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = (1 \ 0)$, $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(4) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -13 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = (1 \ 0)$, $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(5) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -13 & -4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = (1 \ 0)$, $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

課題 5. 4. 3 「課題5. 4. 2」を参考につぎのことを確かめなさい。

- (1) 固有値の実部が正であると、出力は発散する
- (2) 固有値の実部が負であると、出力は収束する
- (3) 固有値が複素数になっている場合、必ず共役複素数が対になった固有値になる。虚部は、振動する出力の周波数に対応しており、虚部の絶対値が大きいと周波数は大きくなる。

5. 5 モータの位置決め制御と状態方程式

「4. 2」「4. 3」で紹介したモータの位置決め制御を状態方程式で記述する。

5. 5. 1 DC モータを用いた位置決め制御系（位置フィードバック制御）

(4.17) より

$$T \ddot{\theta}(t) + \dot{\theta}(t) + Kk_p \theta(t) = Kk_p \theta_r(t)$$

$\omega(t) = \dot{\theta}(t)$ とおくと

$$\begin{cases} \dot{\theta}(t) = \omega(t) \\ \dot{\omega}(t) = -\frac{Kk_p}{T} \theta(t) - \frac{1}{T} \omega(t) + \frac{Kk_p}{T} \theta_r(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\theta}(t) \\ \dot{\omega}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{Kk_p}{T} & -\frac{1}{T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{Kk_p}{T} \end{pmatrix} \theta_r(t) \\ \theta(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

5. 5. 2 DC モータを用いた位置決め制御系（位置フィードバック制御+速度フィードバック）

(4.28) より

$$T \ddot{\theta}(t) + (1 + Kk_v) \dot{\theta}(t) + Kk_p \theta(t) = Kk_p \theta_r(t)$$

$\omega(t) = \dot{\theta}(t)$ とおくと

$$\begin{cases} \dot{\theta}(t) = \omega(t) \\ \dot{\omega}(t) = -\frac{Kk_p}{T} \theta(t) - \frac{1 + Kk_v}{T} \omega(t) + \frac{Kk_p}{T} \theta_r(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\theta}(t) \\ \dot{\omega}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{Kk_p}{T} & -\frac{1 + Kk_v}{T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{Kk_p}{T} \end{pmatrix} \theta_r(t) \\ \theta(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

6. 可制御性と可観測性

6. 1 可制御性

ある制御系が可制御であるとは

「制御系のすべての状態変数を、任意の有限時間内に、任意の初期状態から任意の終端状態に移すような制御が存在する。」

可制御性の定理

n 次元制御系が可制御であるための必要十分条件

「可制御行列」 $\mathbf{V} = (\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{b} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b})$ で $\text{rank}\mathbf{V} = n$

$\mathbf{A}: n \times n$, $\mathbf{V}: n \times n$

6. 2 可観測性

ある制御系が可観測であるとは

「制御系の出力の有限時間区間の観測からその制御系の初期状態を一意的に決定できる」

可観測性の定理

n 次元制御系が可観測であるための必要十分条件

「可観測行列」 $\mathbf{N} = (\mathbf{c}^T \quad \mathbf{A}^T \mathbf{c}^T \quad (\mathbf{A}^T)^2 \mathbf{c}^T \quad \dots \quad (\mathbf{A}^T)^{n-1} \mathbf{c}^T)$ で $\text{rank} \mathbf{N} = n$

$\mathbf{A}: n \times n, \mathbf{N}: n \times n$

6. 3 可制御性と可観測性を検討する例

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} b_1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = (1 \quad c_2) \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

の時の可制御性, 可観測性を考える

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = (1 \quad c_2)$$

(1) 可制御行列を求める

$$\mathbf{A}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V} = (\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} b_1 & -b_1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$b_1 = 0$ の時 $\text{rank} \mathbf{V} = 1 \rightarrow$ 可制御ではない

$b_1 \neq 0$ の時 $\text{rank} \mathbf{V} = 2 \rightarrow$ 可制御である

(2) 可観測行列を求める

$$\mathbf{A}^T \mathbf{c}^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2c_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{N} = (\mathbf{c}^T \quad \mathbf{A}^T \mathbf{c}^T) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ c_2 & -2c_2 \end{pmatrix}$$

$c_1 = 0$ の時 $\text{rank} \mathbf{N} = 1 \rightarrow$ 可観測ではない

$c_1 \neq 0$ の時 $\text{rank} \mathbf{N} = 2 \rightarrow$ 可観測である

課題 6. 1 自動車の振動制御を行いたい。次の各問いに答えなさい

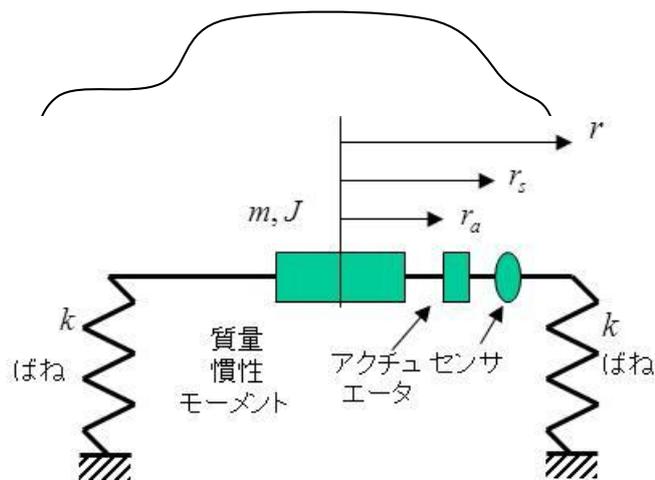
(1) 自動車の物理モデルの生成

自動車のゆれ防止装置を考えるために図のようなモデルを考える。

自動車は単純化し, 慣性モーメント J , 質量 m とし, 重心は中央にあるとする。

前後輪の部分のばね性をばね定数 k で表す。

アクチュエータは上下方向に力を発生することとして, 中心より右側 r_a の位置にある都市, 上下方向



センサは中心より右側 r_s の位置にあるとする。

車輪位置の変位を u_1, u_2 とし、重心位置の変位を x 、重心周りの角度を θ とする。

運動モデルは次の 2 式で記述できる。

(1-1) 重心の上下方向の動作を規定する運動方程式 (A) を記述しなさい。

(1-2) 重心周りの回転動作を規定する運動方程式 (B) を記述しなさい。

(1-3) センサ位置の変位 y を規定する式 (C) を記述しなさい。

(1-4) 「(A) (B) (C)」の 2 つの運動方程式で、 u_1, u_2 を消去しなさい。

ただし

$$(1-1) \quad \ddot{x}(t) = -\frac{2k}{m}x(t) + \frac{1}{m}f(t)$$

$$(1-2) \quad \ddot{\theta}(t) = -\frac{2kr^2}{J}\theta(t) + \frac{r_a}{J}f(t)$$

$$(1-3) \quad y(t) = x(t) + r_s\theta(t)$$

が得られたら正解

(2) 状態方程式の生成

(2-1) ここで $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}(t)$ $\dot{\theta}(t) = \omega(t)$ とおき、状態表現で記述しなさい。

ただし、状態ベクトルを $\mathbf{x}(t) = (x(t) \ v(t) \ \theta(t) \ \omega(t))^T$ とおく。

$$(2-2) \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}f(t), \quad y(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t)$$

とおいた時、次の a,b,c,d,e の値を求めなさい

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & b & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 0 \\ d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = (1 \ 0 \ e \ 0)$$

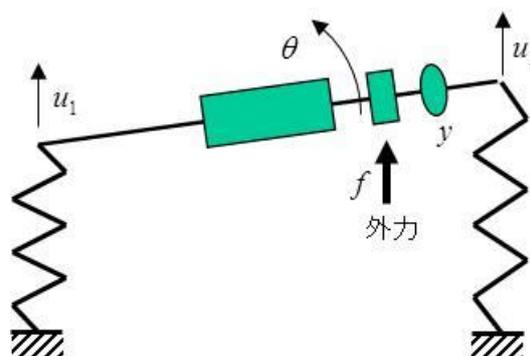
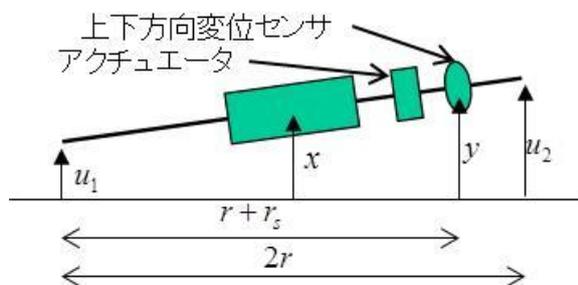
(3) 可制御性の検査

$\mathbf{V} = (\mathbf{b} \ \mathbf{A}\mathbf{b} \ \mathbf{A}^2\mathbf{b} \ \mathbf{A}^3\mathbf{b})$ のランクを求めて 4 であれば可制御である。

可制御性を検討し、考察しなさい。

(4) 可観測性の検査

$\mathbf{N} = (\mathbf{c}^T \ \mathbf{A}^T\mathbf{c}^T \ (\mathbf{A}^T)^2\mathbf{c}^T \ (\mathbf{A}^T)^3\mathbf{c}^T)$ のランクを求めて 4 であれば可観測である。



可観測性を検討し，考察しなさい。

7. 倒立振り子を例にとった制御方法

7. 1 状態方程式

倒立振り子は、もともと不安定な運動系なので、必ず制御が必要となる。モデル化に当たっては次のように仮定する。

(1) 振り子の部分の全質量は錘の部分だけにあり、棒の部分の質量は0とする。

(2) 倒立振り子の制御のために外力 $f(t)$ を加えられるものとする。

運動方程式は台車と振り子別々に作る

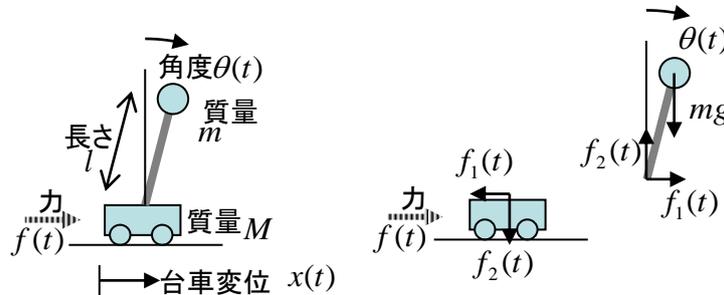


図7 倒立振り子

$$\begin{cases} M\ddot{x}(t) = f(t) - f_1(t) & \text{台車の}x\text{方向の運動方程式} \\ m \frac{d^2}{dt^2}(x(t) + l \sin \theta(t)) = f_1(t) & \text{錘の}x\text{方向の運動方程式} \\ m \frac{d^2}{dt^2}(l \cos \theta(t)) = f_2(t) - mg & \text{錘の}y\text{方向の運動方程式} \\ 0\ddot{\theta}(t) = lf_2(t) \sin \theta(t) - lf_1(t) \cos \theta(t) & \text{錘の回転方向の運動方程式} \end{cases}$$

$|\theta| \ll 1$ なので、 $\sin \theta = \theta$ 、 $\cos \theta = 1$ に近似

$$\begin{cases} M\ddot{x}(t) = f(t) - f_1(t) \\ m(\ddot{x}(t) + l\ddot{\theta}(t)) = f_1(t) \\ f_2(t) - mg = 0 \\ f_2(t)\theta(t) - f_1(t) = 0 \end{cases}$$

$f_1(t)$ 、 $f_2(t)$ を消去するために

$$f_2(t) = mg, \quad f_1(t) = mg\theta(t)$$

を用いて

$$\begin{cases} M\ddot{x}(t) = f(t) - mg\theta(t) \\ m(\ddot{x}(t) + l\ddot{\theta}(t)) = mg\theta(t) \\ \ddot{x}(t) = -\frac{mg}{M}\theta(t) + \frac{1}{M}f(t) \\ \ddot{x}(t) + l\ddot{\theta}(t) = g\theta(t) \end{cases}$$

$\ddot{x}(t)$ と $\ddot{\theta}(t)$ が1つの式に入らないように変形

$$\begin{cases} \left\{ -\frac{mg}{M}\theta(t) + \frac{1}{M}f(t) \right\} + l\ddot{\theta}(t) = g\theta(t) \\ \ddot{x}(t) = -\frac{mg}{M}\theta(t) + \frac{1}{M}f(t) \\ \ddot{\theta}(t) = \frac{1}{l} \left(\frac{m}{M} + 1 \right) g\theta(t) - \frac{1}{lM}f(t) \end{cases}$$

ここで $v(t) = \dot{x}(t)$ 、 $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$ とおく。

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v(t) \\ \dot{v}(t) = -\frac{mg}{M}\theta(t) + \frac{1}{M}f(t) \\ \dot{\theta}(t) = \omega(t) \\ \dot{\omega}(t) = \frac{1}{l}\left(\frac{m}{M}+1\right)g\theta(t) - \frac{1}{lM}f(t) \end{cases}$$

行列で表すと

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{v}(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ \dot{\omega}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{l}\left(\frac{m}{M}+1\right)g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \\ \theta(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{lM} \end{pmatrix} f(t)$$

ここで

$$k_1 = \frac{mg}{M}, \quad k_2^2 = \frac{1}{l}\left(\frac{m}{M}+1\right)g, \quad k_3 = \frac{1}{M}, \quad k_4 = \frac{1}{lM}$$

とおく。(これらはすべて正)

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{v}(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ \dot{\omega}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k_2^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \\ \theta(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ k_3 \\ 0 \\ -k_4 \end{pmatrix} f(t)$$

ここで $\theta(t)$ を観測することにすれば

$$\theta(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \\ \theta(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}f(t) \\ \theta(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t) \end{cases}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k_2^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ k_3 \\ 0 \\ -k_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = (0 \ 0 \ 1 \ 0)$$

の形が得られた。

7. 2 状態推移行列 $\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}((s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}) = \exp(\mathbf{A}t)$ を求める

$$\begin{aligned} s\mathbf{I} - \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ 0 & 0 & -k_2^2 & s \end{pmatrix} \\ |s\mathbf{I} - \mathbf{A}| &= \begin{vmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ 0 & 0 & -k_2^2 & s \end{vmatrix} = s^2(s^2 - k_2^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} &= \frac{1}{s^2(s^2 - k_2^2)} \begin{pmatrix} s(s^2 - k_2^2) & (s^2 - k_2^2) & -k_1s & -k_1 \\ 0 & s(s^2 - k_2^2) & -k_1s^2 & -k_1s \\ 0 & 0 & s^3 & s^2 \\ 0 & 0 & k_2^2s^2 & s^3 \end{pmatrix} \\
(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} & -\frac{k_1}{s(s^2 - k_2^2)} & -\frac{k_1}{s^2(s^2 - k_2^2)} \\ 0 & \frac{1}{s} & -\frac{k_1}{s^2 - k_2^2} & -\frac{k_1}{s(s^2 - k_2^2)} \\ 0 & 0 & \frac{s}{s^2 - k_2^2} & \frac{1}{s^2 - k_2^2} \\ 0 & 0 & \frac{k_2^2}{s^2 - k_2^2} & \frac{s}{s^2 - k_2^2} \end{pmatrix} \\
(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} & -\frac{k_1}{2k_2^2} \left(-\frac{2}{s} + \frac{1}{s+k_2} + \frac{1}{s-k_2} \right) & -\frac{k_1}{2k_2^3} \left(-\frac{2k_2}{s^2} + \frac{1}{s+k_2} + \frac{1}{s-k_2} \right) \\ 0 & \frac{1}{s} & -\frac{k_1}{2k_2} \left(-\frac{1}{s+k_2} + \frac{1}{s-k_2} \right) & -\frac{k_1}{2k_2^2} \left(-\frac{2}{s} + \frac{1}{s+k_2} + \frac{1}{s-k_2} \right) \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s+k_2} + \frac{1}{s-k_2} \right) & \frac{1}{2k_2} \left(-\frac{1}{s+k_2} + \frac{1}{s-k_2} \right) \\ 0 & 0 & \frac{k_2}{2} \left(-\frac{1}{s+k_2} + \frac{1}{s-k_2} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s+k_2} + \frac{1}{s-k_2} \right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

外力はない状態で $\mathbf{x}(0) = (0 \ 0 \ 1 \ 0)^T$ を仮定する

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left((s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \right) \mathbf{x}(0)$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} & -\frac{k_1}{2k_2^2} \left(-\frac{2}{s} + \frac{1}{s+k_2} + \frac{1}{s-k_2} \right) & -\frac{k_1}{2k_2^3} \left(-\frac{2k_2}{s^2} + \frac{1}{s+k_2} + \frac{1}{s-k_2} \right) \\ 0 & \frac{1}{s} & -\frac{k_1}{2k_2} \left(-\frac{1}{s+k_2} + \frac{1}{s-k_2} \right) & -\frac{k_1}{2k_2^2} \left(-\frac{2}{s} + \frac{1}{s+k_2} + \frac{1}{s-k_2} \right) \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s+k_2} + \frac{1}{s-k_2} \right) & \frac{1}{2k_2} \left(-\frac{1}{s+k_2} + \frac{1}{s-k_2} \right) \\ 0 & 0 & \frac{k_2}{2} \left(-\frac{1}{s+k_2} + \frac{1}{s-k_2} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s+k_2} + \frac{1}{s-k_2} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= \begin{pmatrix} 1 & t & -\frac{k_1}{2k_2^2}(-2 + \exp(-k_2t) + \exp(k_2t)) & -\frac{k_1}{2k_2^3}(-2k_2t + \exp(-k_2t) + \exp(k_2t)) \\ 0 & 1 & -\frac{k_1}{2k_2}(-\exp(-k_2t) + \exp(k_2t)) & -\frac{k_1}{2k_2^2}(-2 + \exp(-k_2t) + \exp(k_2t)) \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(\exp(-k_2t) + \exp(k_2t)) & \frac{1}{2k_2}(-\exp(-k_2t) + \exp(k_2t)) \\ 0 & 0 & \frac{k_2}{2}(-\exp(-k_2t) + \exp(k_2t)) & \frac{1}{2}(\exp(-k_2t) + \exp(k_2t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{k_1}{2k_2^2}(-2 + \exp(-k_2t) + \exp(k_2t)) \\ -\frac{k_1}{2k_2}(-\exp(-k_2t) + \exp(k_2t)) \\ \frac{1}{2}(\exp(-k_2t) + \exp(k_2t)) \\ \frac{k_2}{2}(-\exp(-k_2t) + \exp(k_2t)) \end{pmatrix} \\
\theta(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t) &= (0 \quad 0 \quad 1 \quad 0) \begin{pmatrix} -\frac{k_1}{2k_2^2}(-2 + \exp(-k_2t) + \exp(k_2t)) \\ -\frac{k_1}{2k_2}(-\exp(-k_2t) + \exp(k_2t)) \\ \frac{1}{2}(\exp(-k_2t) + \exp(k_2t)) \\ \frac{k_2}{2}(-\exp(-k_2t) + \exp(k_2t)) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}(\exp(-k_2t) + \exp(k_2t))
\end{aligned}$$

となり、発散することがわかり、このことは容易に推測される。

7.3 可制御性, 可観測性

倒立振り子の系の可制御性, 可観測性を調べる。

(1) 可制御性

$\mathbf{V} = (\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{b} \quad \mathbf{A}^3\mathbf{b})$ のランクを求めて 4 であれば可制御である。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k_2^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ k_3 \\ 0 \\ -k_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} k_3 \\ 0 \\ -k_4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^2\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ k_1k_4 \\ 0 \\ -k_2^2k_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^3\mathbf{b} = \begin{pmatrix} k_1k_4 \\ 0 \\ -k_2^2k_4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これらから

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 & k_3 & 0 & k_1k_4 \\ k_3 & 0 & k_1k_4 & 0 \\ 0 & -k_4 & 0 & -k_2^2k_4 \\ -k_4 & 0 & -k_2^2k_4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
|\mathbf{V}| &= \begin{vmatrix} 0 & k_3 & 0 & k_1 k_4 \\ k_3 & 0 & k_1 k_4 & 0 \\ 0 & -k_4 & 0 & -k_2^2 k_4 \\ -k_4 & 0 & -k_2^2 k_4 & 0 \end{vmatrix} = -k_3 \begin{vmatrix} k_3 & 0 & k_1 k_4 \\ -k_4 & 0 & -k_2^2 k_4 \\ 0 & -k_2^2 k_4 & 0 \end{vmatrix} + k_4 \begin{vmatrix} k_3 & 0 & k_1 k_4 \\ 0 & k_1 k_4 & 0 \\ -k_4 & 0 & -k_2^2 k_4 \end{vmatrix} \\
&= -k_2^2 k_3 k_4 \begin{vmatrix} k_3 & k_1 k_4 \\ -k_4 & -k_2^2 k_4 \end{vmatrix} + k_1 k_4^2 \begin{vmatrix} k_3 & k_1 k_4 \\ -k_4 & -k_2^2 k_4 \end{vmatrix} \\
&= (-k_2^2 k_3 + k_1 k_4) k_4 (-k_2^2 k_3 k_4 + k_1 k_4^2) = (-k_2^2 k_3 + k_1 k_4)^2 k_4^2 \\
&= \left(-\frac{1}{l} \left(\frac{m}{M} + 1 \right) g \frac{1}{M} + \frac{mg}{M} \frac{1}{lM} \right)^2 \left(\frac{1}{lM} \right)^2 = \left(\frac{Mg}{lM^2} \right)^2 \left(\frac{1}{lM} \right)^2 = \frac{g^2}{l^4 M^4} \neq 0
\end{aligned}$$

となり，可制御である。

(2) 可観測性

$x(t) + l\theta(t)$ すなわち，振り子先端の横方向位置を観測することにする。(本来は $x(t)$ と $\theta(t)$ とは別々に測定するものであるが，便宜的に和を測定するものとする)

$$\mathbf{c} = (1 \quad 0 \quad l \quad 0)$$

$\mathbf{N} = (\mathbf{c}^T \quad \mathbf{A}^T \mathbf{c}^T \quad (\mathbf{A}^T)^2 \mathbf{c}^T \quad (\mathbf{A}^T)^3 \mathbf{c}^T)$ のランクを求めて 4 であれば可観測である。

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_1 & 0 & k_2^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ l \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^T \mathbf{c}^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ l \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{A}^T)^2 \mathbf{c}^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -k_1 + lk_2^2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(\mathbf{A}^T)^3 \mathbf{c}^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -k_1 + lk_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ l & 0 & -k_1 + lk_2^2 & 0 \\ 0 & l & 0 & -k_1 + lk_2^2 \end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{N}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ l & 0 & -k_1 + lk_2^2 & 0 \\ 0 & l & 0 & -k_1 + lk_2^2 \end{vmatrix} = (-k_1 + lk_2^2)^2$$

$$\begin{aligned}
&= \left(-\frac{mg}{M} + l \frac{1}{l} \left(\frac{m}{M} + 1 \right) g \right)^2 = \left(-\frac{mg}{M} + \frac{(m+M)g}{M} \right)^2 \\
&= g^2 \neq 0
\end{aligned}$$

なので $\text{Rank}(\mathbf{N}) = 4$ である。

よって可観測である。

8 状態フィードバックによる制御系の設計 (極配置法)

8.1 状態フィードバックによる極配置法

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \\ y(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

この制御系の振る舞いは、 \mathbf{A} の固有値（極）によって定まっていた。（課題 5. 4. 2 参照）
ここで一般入力 $u(t)$ を状態変数の一次結合によって作ることにし、これを状態フィードバックとい
う。

$$u(t) = \mathbf{f}\mathbf{x}(t) + v(t) = (f_1 \ f_2 \ f_3 \ \cdots \ f_n)(x_1 \ x_2 \ x_3 \ \cdots \ x_n)^T + v(t)$$

ここで $v(t)$ は新たな一般入力であり、

$$\mathbf{f} = (f_1 \ f_2 \ f_3 \ \cdots \ f_n)$$

はフィードバック係数ベクトルである。

そうすると

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t)$$

は

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(\mathbf{f}\mathbf{x}(t) + v(t))$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{f})\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}v(t)$$

となり

\mathbf{A} を $\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{f}$ に置き換えたことに相当する。この制御系の振る舞いは $\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{f}$ の固有値（極）によっ
て定まることになる。 $\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{f}$ の極を適当なところに置けば、不安定な制御系も安定にすることが出
来る。すなわち極の実部が負になるようにすればよい。

この方法は「状態フィードバックによる極配置法」を呼ばれる。

8. 2 状態フィードバックによる極配置法の例

例

(1) 次のシステムの固有値（極）を $-4 \pm j2$ にするような状態フィードバック係数ベクトル
 $\mathbf{f} = (f_0 \ f_1)$ を求める。この設定した極は、極の実数部が負なので、安定な動作（時間経過とともに
収束）を与える。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = (1 \ 1) \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad \text{を} \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \\ y(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad \text{とおく}$$

状態フィードバックが付加されたときは

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (f_0 \ f_1) \right) \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} v(t) \\ y(t) = (1 \ 1) \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{f})\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}v(t) \\ y(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

この時の固有方程式（固有値を求めるための方程式）は

$$|s\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{f})| = 0$$

$$\left| \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (f_0 \ f_1) \right) \right| = 0$$

$$\left| \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_0 & f_1 \\ f_0 & f_1 \end{pmatrix} \right) \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} s+1-f_0 & -1-f_1 \\ 2-f_0 & s+3-f_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$s^2 + (4 - f_0 - f_1)s + (3 - 3f_0 - f_1 + f_0f_1) - (-2 + f_0 - 2f_1 + f_0f_1) = 0$$

$$s^2 + (4 - f_0 - f_1)s + (5 - 4f_0 + f_1) = 0 \quad (1)$$

一方 $-4 \pm j2$ を解に持つ 2 次方程式は

$$(s+4-j2)(s+4+j2)=0$$

より

$$s^2+8s+20=0 \quad (2)$$

(1) (2) の係数が等しいはずなので

$$\begin{cases} 4-f_0-f_1=8 \\ 5-4f_0+f_1=20 \end{cases} \quad \begin{cases} f_0=-\frac{19}{5} \\ f_1=-\frac{1}{5} \end{cases}$$

9. 状態フィードバックによる倒立振り子の制御 (極配置法)

「7. 1」より倒立振り子では次式が成り立っている。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}f(t) \\ \theta(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t) \end{cases}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k_2^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ k_3 \\ 0 \\ -k_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 0)$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \\ \theta(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix}$$

$$k_1 = \frac{mg}{M}, \quad k_2^2 = \frac{1}{l} \left(\frac{m}{M} + 1 \right) g, \quad k_3 = \frac{1}{M}, \quad k_4 = \frac{1}{lM}$$

フィードバック係数ベクトルを $\mathbf{f} = (f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4)$ としてフィードバック量を次のように表す。

$$f(t) = \mathbf{f}\mathbf{x}(t)$$

これはフィードバック量を台車の変位, 台車の速度, 振り子の角度, 振り子の各速度の 1 次結合で与えることを意味している。状態方程式は

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}\mathbf{f}\mathbf{x}(t) \\ \theta(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{f})\mathbf{x}(t) \\ \theta(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

となる。

ここで $\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{f}$ の固有値の実部が負になるように $\mathbf{f} = (f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4)$ を定めればよい。

実際の極配置法では次の手順で $\mathbf{f} = (f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4)$ を定める。

(1) 制御系が可制御であることを確認する。

すなわち

$$\mathbf{V} = (\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{b} \quad \mathbf{A}^3\mathbf{b})$$

において $\text{Rank}(\mathbf{V}) = 4$ を確認する。(実際 $\det \mathbf{V} = \frac{g^2}{l^4 M^4} \neq 0$ となった。)

(2) \mathbf{A} の固有方程式 (s の多項式) の係数を求める。

すなわち, $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$ より, $s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0$ の係数を求める。

これは \mathbf{A} を数値演算ダニレフスキー法でコンパニオン行列に変換すると求められる。
コンパニオン行列は

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -a_3 & -a_2 & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で表され、 \mathbf{A} と \mathbf{C} の固有値は一致している。そこで $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{C}) = 0$ より $s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0$ を得る。

(3) 所望の固有値 (複素数の場合は共役な複素数の組にする) を持つ 4 次の多項式の係数を求める。

所望の固有値を $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ とすると、 $(s - \beta_1)(s - \beta_2)(s - \beta_3)(s - \beta_4) = 0$ より $s^4 + \gamma_3s^3 + \gamma_2s^2 + \gamma_1s + \gamma_0 = 0$ を得る。

(4) 次の行ベクトルを算出する。

$$\bar{\mathbf{f}} = (a_0 - \gamma_0 \quad a_1 - \gamma_1 \quad a_2 - \gamma_2 \quad a_3 - \gamma_3)$$

(5) 次の変換行列を求める。

$$\mathbf{T} = \mathbf{V}\mathbf{L}$$

$$\text{ただし, } \mathbf{L} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ a_2 & a_3 & 1 & 0 \\ a_3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(6) フィードバック係数ベクトルは $\mathbf{f} = \bar{\mathbf{f}}\mathbf{T}^{-1}$ で与えられる。

10. 能動消音の紹介

実機による演習フィードフォワード制御